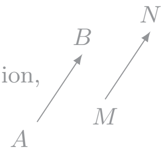
Vecteurs : introduction géométrique.

Vecteur et translation.

Nous définirons un *vecteur* $\vec{u}$ comme le déplacement associé à une translation t. Nous dirons que t est *la translation de vecteur* $\vec{u}$ et nous noterons $t_{\vec{u}}$ cette translation. Si t transforme le point A en un point B alors nous dirons que $\overrightarrow{AB}$ est un représentant de la translation et donc du vecteur $\vec{u}$. Un vecteur (et une translation) ont une infinité de représentant. Si $\overrightarrow{MN}$ est un représentant d'un vecteur $\vec{u}$ alors nous définissons

— la *norme du vecteur* par : $\|\vec{u}\| = MN$,
— la *direction du vecteur* qui est la droite (MN) (ou une autre droite parallèle),
— le *sens du vecteur* $\vec{u}$: de M vers N.

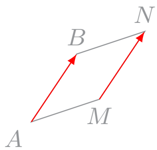
Deux représentants
d'une même translation,
d'un même vecteur.



Pour le représentant $\overrightarrow{MN}$, M est appelé *l'origine* et N est appelé *l'extrémité*.

Égalité de représentants.

Deux représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont égaux (représentent la même translation, le même vecteur) si et seulement si $ABNM$ est un parallélogramme.



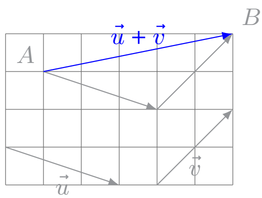
L'absence de déplacement est représentée par le vecteur $\vec{0}$ qui est appelé *le vecteur nul*. Ainsi $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Proposition 1. I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

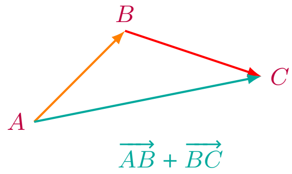
Somme de vecteurs.

La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} + \vec{v}$, correspondant à la succession des translations $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Ci-dessous B est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$. Nous pouvons aussi dire que $\overrightarrow{AB}$ est un représentant de $\vec{u} + \vec{v}$. Autrement dit $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB}$.



Proposition 2. *(Relation de Chasles.)*
Soient A, B et C trois points du plan. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

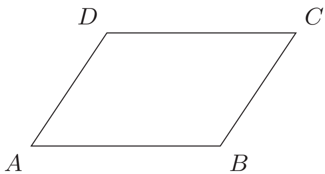


Un vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ est appelé *l'opposé de* $\vec{u}$ et on le note $-\vec{u}$.
Si $\overrightarrow{AB}$ est un représentant de $\vec{u}$ alors $\overrightarrow{BA}$ est un représentant de $-\vec{u}$.

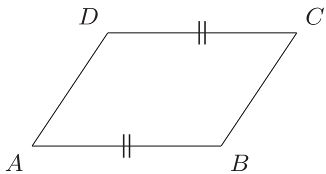
Exercices.

EXERCICE 1. Dites, sans justification, si le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme dans les cas suivants.

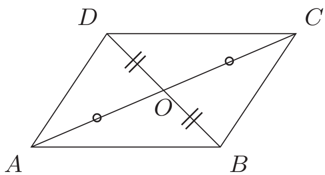
a)



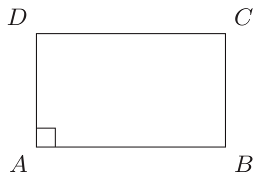
b)



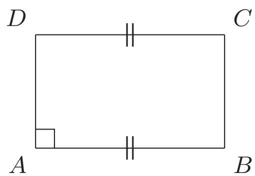
c)



d)



e)



Exercice 1.

a) Non.
b) Non.
c) Oui.
d) Non.
e) Non.

EXERCICE 2. Dites, sans justification, si le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme dans les cas suivants.

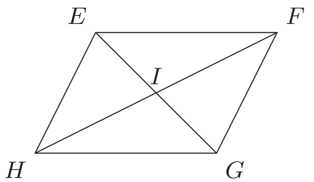
a) Le quadrilatère $ABCD$ à deux angles opposés de même mesure.
b) $ABCD$ à des côtés opposés parallèles deux à deux.
c) Le trapèze $ABCD$ a deux angles opposés de même mesure.

d) $ABCD$ est un losange.
e) $ABCD$ est non croisé et ses côtés opposés sont de même longueur deux à deux.
f) $ABCD$ est non croisé et deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur.
g) $ABCD$ est un rectangle.
h) $ABDC$ est un carré.

Exercice 2.

a) Non.	b) Oui.	c) Oui.	d) Oui.
e) Oui.	f) Oui.	g) Oui.	h) Oui.

EXERCICE 3. On considère un parallélogramme $EFGH$ tel que ci-dessous.



1. Donnez un vecteur égale à

   a) $\overrightarrow{EF}$. b) $\overrightarrow{GH}$. c) $\overrightarrow{EH}$. d) $\overrightarrow{GF}$.

2. Complétez par le point qui convient.

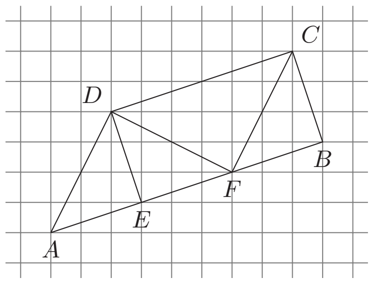
   a) $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{I\ldots}$. b) $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{I\ldots}$. c) $\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{I\ldots}$.

Exercice 3.

1. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{HE}$.
2. $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{IG}$, $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{IF}$ $\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{IH}$.

EXERCICE 4. Par lecture graphique indiquez

1. un vecteur égal à $\overrightarrow{AE}$; à $\overrightarrow{CF}$.
2. un vecteur de même direction que $\overrightarrow{CB}$ mais de sens opposé ; idem pour $\overrightarrow{AF}$.
3. un vecteur égal à $\overrightarrow{DC}$ d'extrémité F ; égal à $\overrightarrow{FB}$ d'origine A.
4. deux vecteurs de même de direction, de même sens qui ne sont pas égaux.
5. deux vecteurs de même norme qui ne sont pas égaux.



Exercice 4.

1. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FB}$. $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DA}$.
2. $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{FE}$.
3. $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{AE}$.
4. $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DC}$.
5. $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{FC}$.

EXERCICE 5. Soient $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}$, A et B des points, C et D leurs images respectives par la translation $t_{\vec{u}}$. Démontrez que $ABDC$ est un parallélogramme.

EXERCICE 6. Soient $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}$, M et P des points, N l'image de M par la translation $t_{\vec{u}}$, Q un point tel que $MNQP$ soit un parallélogramme. Démontrez que $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$.

Exercice 6.

Démontrons : $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$.

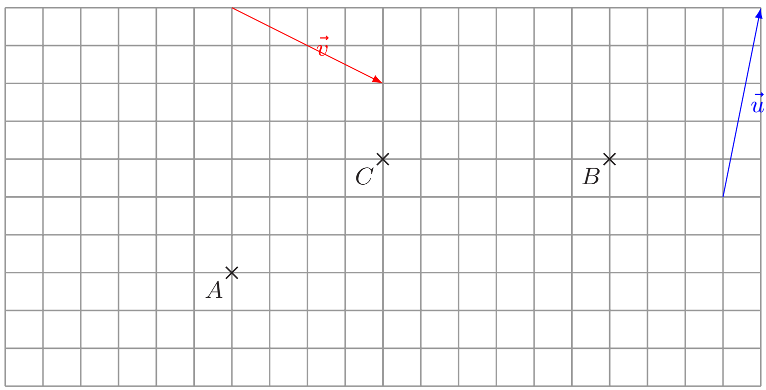
* $t_{\vec{u}}(M) = N$ donc $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$.

* $MNQP$ est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$.

Nous déduisons des points précédents par transitivité que

$$\boxed{\overrightarrow{PQ} = \vec{u}.}$$

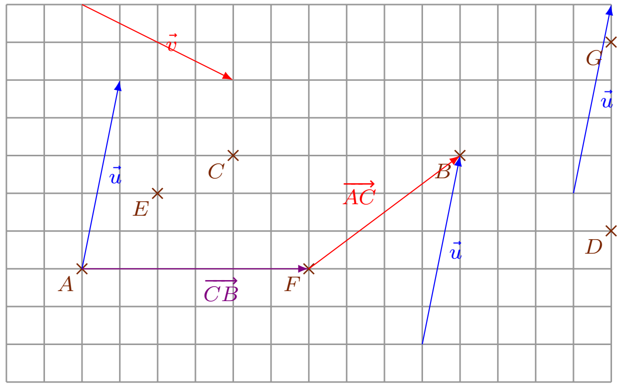
EXERCICE 7.



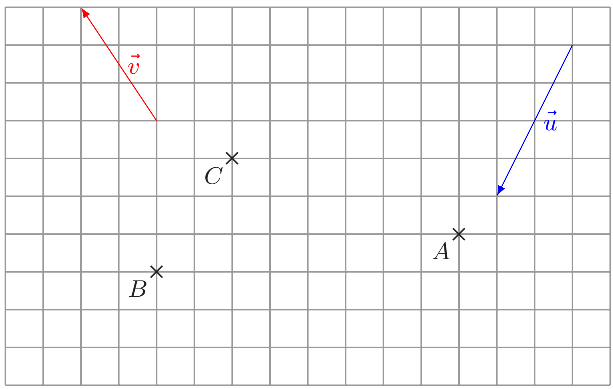
Tracez dans chaque cas.

a) Le point F tel que $ACBF$ soit un parallélogramme.
b) Le point G tel que $ABCG$ soit un parallélogramme.
c) Le représentant de $\vec{u}$ d'origine A.
d) Le représentant de $\vec{u}$ d'extrémité B.
e) L'image D de B par la translation de vecteur $\vec{v}$.
f) Le point E dont C est l'image par la translation de vecteur $\vec{v}$.
g) Le représentant de $\overrightarrow{AC}$ d'extrémité B.
h) Le représentant de $\overrightarrow{CB}$ d'origine A.

Exercice 7.



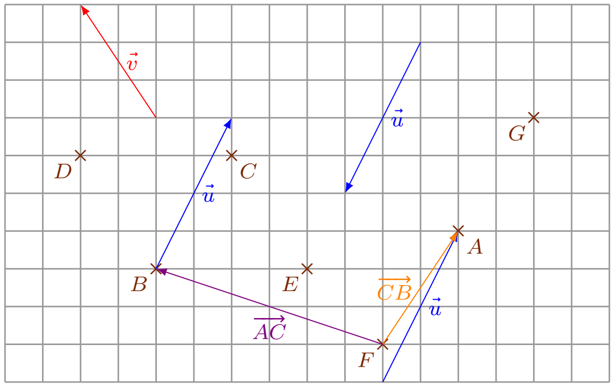
EXERCICE 8.



Tracez dans chaque cas.

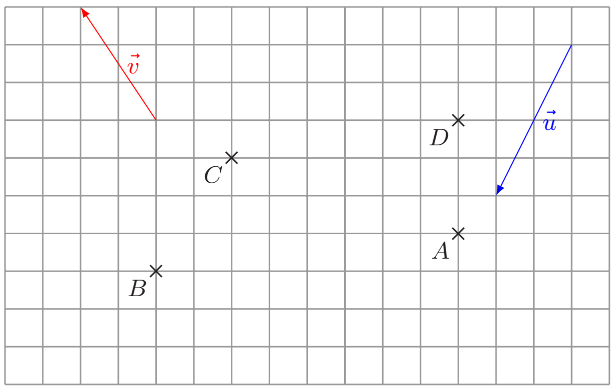
a) Le point F tel que $ACBF$ soit un parallélogramme.
b) Le point G tel que $BACG$ soit un parallélogramme.
c) Le représentant de $\vec{u}$ d'origine A.
d) Le représentant de $\vec{u}$ d'extrémité B.
e) L'image D de B par la translation de vecteur $\vec{v}$.
f) Le point E dont C est l'image par la translation de vecteur $\vec{v}$.
g) Le représentant de $\overrightarrow{AC}$ d'extrémité B.
h) Le représentant de $\overrightarrow{CB}$ d'origine A.

Exercice 8.

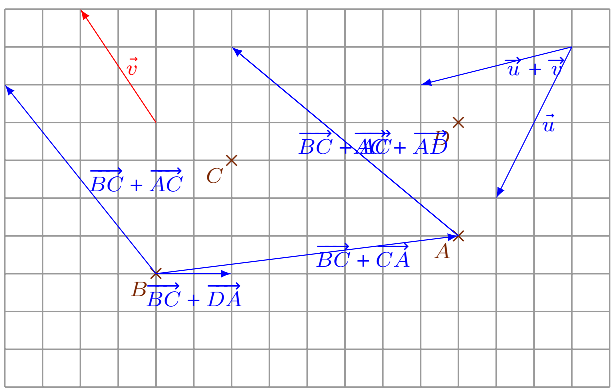


EXERCICE 9.

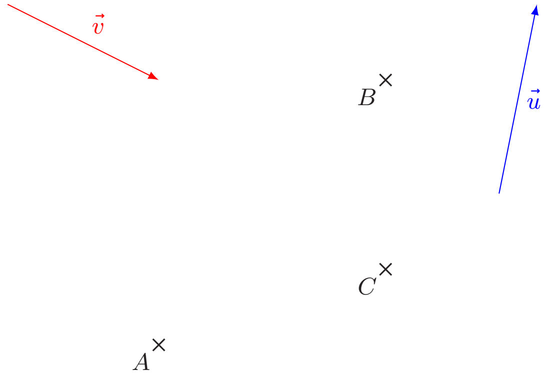
Dessinez les vecteurs $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$, $\vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.



Exercice 9.



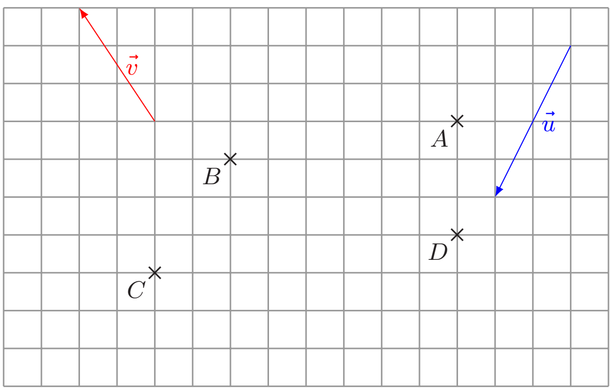
EXERCICE 10.



Tracez dans chaque cas.

a) Le point F tel que $ACBF$ soit un parallélogramme.
b) Le point G tel que $ABCG$ soit un parallélogramme.
c) Le représentant de $\vec{u}$ d'origine A.
d) Le représentant de $\vec{u}$ d'extrémité B.
e) L'image D de B par la translation de vecteur $\vec{v}$.
f) Le point E dont C est l'image par la translation de vecteur $\vec{v}$.
g) Le représentant de $\overrightarrow{AC}$ d'extrémité B.
h) Le représentant de $\overrightarrow{CB}$ d'origine A.

EXERCICE 11. Dessinez les vecteurs $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$ et $\vec{u} + \vec{v}$.



EXERCICE 12. On considère un parallélogramme $RSTU$ de centre O. On note F l'image du point S par la translation de vecteur $\overrightarrow{UT}$ et E l'image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{RU}$. Démontrez que $RSET$ est un parallélogramme.

Exercice 12.

- $RSTU$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{RU} = \overrightarrow{ST}$.
- Par construction : $\overrightarrow{RU} = \overrightarrow{FE}$.

Des deux points précédents nous déduisons par transitivité : $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{FE}$. Autrement dit $STEF$ est un parallélogramme.

On en déduit que $\overrightarrow{SF} = \overrightarrow{TE}$.

Or $\overrightarrow{SF} = \overrightarrow{RS}$ donc $\overrightarrow{TE} = \overrightarrow{RS}$.
Autrement dit

$RSET$ est un parallélogramme,

EXERCICE 13. Soient EDF un triangle rectangle en D tel que $ED = 6$ cm et $DF = 4{,}5$ cm, I et J les milieux respectifs de $[ED]$ et $[DF]$, G et H les images respectives de F et I par la translation de vecteur $\overrightarrow{JI}$.

1. Quelle conjecture peut-on émettre pour le point G ?
2. Quelle est la nature de $DJEH$?

EXERCICE 14. Soient ABC un triangle quelconque, I le milieu de $[AB]$, I' l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, A' l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{I'I}$.

Démontrez que $A'BCA$ est un parallélogramme puis en déduire que $\overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{IC}$.

EXERCICE 15. En choisissant des points judicieux complétez.

a) $\overrightarrow{AB} + \cdots = \overrightarrow{AE}$ b) $\overrightarrow{G\ldots} + \overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{GI}$ c) $\overrightarrow{\ldots B} + \overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{CG}$
d) $\overrightarrow{BE} + \cdots = \overrightarrow{BD}$ e) $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{\ldots F} = \overrightarrow{B\ldots}$ f) $\overrightarrow{B\ldots} + \overrightarrow{\ldots A} = \overrightarrow{BA}$
g) $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{G\ldots} = \overrightarrow{B\ldots}$ h) $\overrightarrow{\ldots E} + \overrightarrow{E\ldots} = \overrightarrow{BC}$ i) $\overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{AC}$
j) $\overrightarrow{O\ldots} + \overrightarrow{M\ldots} = \overrightarrow{\ldots P}$ k) $\overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{D\ldots} + \overrightarrow{M\ldots} = \overrightarrow{AG}$

EXERCICE 16. Simplifiez les expressions suivantes (grâce notamment à la relation de Chasles).

a) $\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{CG}$. b) $\overrightarrow{GE} - \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{CG}$. c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GE} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{CG}$.
d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$. e) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$. f) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 17. Démontrez.

a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$. b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$.
c) $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CD}$. d) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.
e) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ f) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$

I Base orthonormée.

Multiplication d'un vecteur par un scalaire.

Il paraît naturel de noter : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB}$. En généralisant nous définirons n'importe quel vecteur $\lambda\overrightarrow{AB}$, λ désignant un réel.

Définition 1. Soient $\overrightarrow{AB}$ le représentant d'un vecteur et λ un nombre quelconque. Nous définissons le vecteur $\lambda\overrightarrow{AB}$ par

— $\lambda\overrightarrow{AB}$ a même direction que $\overrightarrow{AB}$
— la norme : $\left\|\lambda\overrightarrow{AB}\right\| = |\lambda| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$
— si $\lambda > 0$ alors $\lambda\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont même sens et si $\lambda < 0$ alors ils sont de sens contraire.

Remarques.

1. Plutôt que d'apprendre cette définition sachez l'utiliser. Les vecteurs ont même direction, la longueur est multipliée par autant que l'indique λ et le sens dépend du signe de λ.

2. Nous retrouverons les règles habituelles de distributivité, de commutativité, d'associativité.
   Si λ et μ sont des nombres et $\vec{u}$ et $\vec{w}$ des vecteurs, alors

$$\lambda(\vec{u} + \vec{w}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{w}, \quad (\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}, \quad \lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$$

3. L'addition et la multiplication par un nombre sont les deux opérations qui définissent de façon très général un espace vectoriel.

Base de vecteurs.

Partir d'un constat : tout déplacement dans le plan peut su décomposer en déplacements élémentaires sur les axes des abscisses et ordonnées.

Définition de combinaison linéaire de deux vecteurs. Définition de base avec combinaison linéaire.

Définition de coordonnées d'un vecteur relativement à une base.

Définition et exemples. remarques sur l'importance le domaine de math est appelé algèbre linéaire.

Définition 2. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, a et b deux réels. Nous dirons que le vecteur $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ est une *combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

Remarques.

1. C'est pourquoi la branche des mathématiques traitant des vecteurs est appelée l'*algèbre linéaire* : *algèbre* à cause des calculs et *linéaire* à cause des *combinaisons linéaires* (et de l'origine historique).

De même que nous avons utilisés les coordonnées pour interpréter toute la géométrie vue au collège de même le vecteurs peuvent être travaillés avec des coordonnées.

Définition 3. Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs du plan, O un point du plan, I l'image de O par la translation de vecteur $\vec{i}$, J l'image de O par la translation de vecteur $\vec{j}$.

Nous dirons que $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est *une base du plan* si et seulement si $(O; I,J)$ est un repère du plan.

Remarques.

1. Pour que $(O; I,J)$ soit un repère il faut que les points O, I et J soient distincts et non alignés.
2. Autrement dit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ n'ont pas la même direction et ne sont pas nuls.
3. Si de plus $(O; I,J)$ est un repère orthonormé alors nous dirons que $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est *une base orthonormée.*
4. Nous pourrons dorénavant parler du repère $\left(O; \vec{i},\vec{j}\right)$. Un repère est complètement défini pr la donnée d'un point et d'une base.

Vecteurs et coordonnées.

En utilisant les bases et les combinaisons linéaires nous pouvons définir les coordonnées d'un vecteur. Par exemple le vecteur $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j}$ aura pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Définition 4.
Soient $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ une base du plan et $\vec{u}$ un vecteur du plan. Il existe un unique couple de réels (x,y) de nombres réels x et y tel que

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Le couple $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est appelé le couple des *coordonnées* de $\vec{u}$.

Remarques.

1. De même que les coordonnées d'un point dépendent du repère choisi, les coordonnées d'un vecteur dépendent de la base choisie.
2. Pour une base fixée les coordonnées du vecteur sont uniques.
   Cette affirmation constitue un théorème qu'il faudrait démontrer ce que nous nous garderons de faire.

   Faire un quadrillage et regarder les déplacement en $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et remarquer que l'on obtient toujours la même combinaison linéaire.

3. Les vecteurs de la base sont les vecteurs, en nombre minimum, qui permettent de décrire n'importe qu'elle translation.
4. Concrètement pour obtenir les coordonnées d'un vecteur dans un repère il suffit de compter les carreaux en suivant l'axe des abscisses puis recommence suivant l'axe des ordonnées, en partant de l'origine pour rejoindre l'extrémité.
5. Les coordonnées de vecteurs sont plutôt notées en colonne qu'en ligne

   $$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

   x est appelé l'abscisse et y l'ordonnée.
6. Si M est l'extrémité du représentant de $\vec{u}$ d'origine O alors M et $\vec{u}$ ont les mêmes coordonnées.

Proposition 3. Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées (dans la même base).

Démonstration. Ce résultat découle directement de l'unicité des coordonnées admises dans la précédente définition.

Définition 5. Soient $(\vec{i},\vec{j})$ une base du plan, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur. Nous appellerons *norme de* $\vec{u}$, et nous noterons $||\vec{u}||$, le nombre

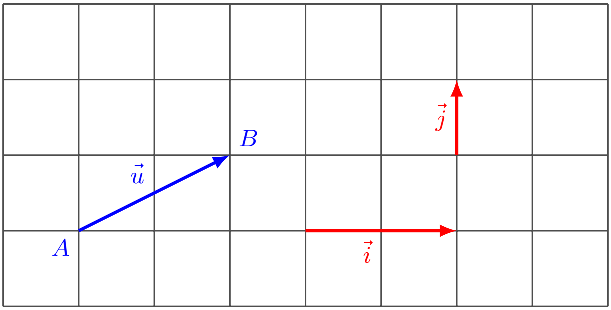
$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exemples.

1. Si $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$ alors

$$\begin{aligned}||\vec{u}|| &= \sqrt{x^2+y^2}\\ &= \sqrt{(-3)^2+7^2}\\ &= \sqrt{58}\end{aligned}$$

2. On considère le quadrillage ci-dessous formé de carrés d'un centimètre de côte.



$AB = \sqrt{5}$ et

$$\begin{aligned}||\vec{u}|| &= \sqrt{x^2+y^2}\\ &= \sqrt{1^2+1^2}\\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

Longueur et norme ne coïncident pas toujours.

Remarques.

1. La norme d'un vecteur est un nombre positif.
2. Nous avions déjà donné une définition de la norme d'un vecteur dans le cas d'un vecteur au sens géométrique (représentant du vecteur). Cette définition se veut un peu plus général puisqu'elle fonctionne pour d'autres sortent de vecteurs. Cependant cette définition de la norme dépend de la base choisie.
3. La norme d'un vecteur peut se confondre avec la longueur si le repère est orthonormé.

Coordonnées à partir de celles des points.

Proposition 4. Soient (O,I,J) un repère du plan, $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ des points dans ce repère, $(\vec{i},\vec{j})$ la base associée au repère $(O;I,I)$ ($i.e$ $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$.

Démonstration.

Déterminons les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\
&= x_B\vec{i} + y_B\vec{j} - \left(x_A\vec{i} + x_A\vec{i}\right) \\
&= (x_B - x_A)\,\vec{i} + (y_B - y_A)\,\vec{j}
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.}
$$

Proposition 5. Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$.

Proposition 6. Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda\vec{u}\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$.

Exercices.

EXERCICE 18. Dessinez deux points A et B distincts puis placez les points M, N et P tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 19. Soient A et B deux points distincts, I le milieu du segment $[AB]$.

Dans chaque cas déterminez le réel λ tel que : $\overrightarrow{AI} = \lambda\overrightarrow{AB}$ puis $\overrightarrow{BI} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 20. Soient A et B deux points du plan distants de 6 unités de longueur (choisissez deux unités de longueur par centimètre).

1. (a) Construisez le point L tel que $\overrightarrow{BL} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$.
   (b) Construisez le point K tel que $\overrightarrow{AK} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$.
2. (a) En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{LK}$ peut s'écrire $\overrightarrow{LB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}$, établissez une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{AB}$.
   (b) Déduisez-en la longueur LK en unités de longueur.

Exercice 20.

1. (a)
   (b)
2. (a) D'après la relation de Chasles :

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{LK} &= \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} \\
&= -\overrightarrow{BL} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AK} \\
&= -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + \left(-\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}\right) \\
&= \left(-\frac{5}{2} - 1 - \frac{4}{3}\right)\overrightarrow{AB} \\
&= \left(-\frac{5\times 3}{2\times 3} - \frac{6}{6} - \frac{4\times 2}{3\times 2}\right)\overrightarrow{AB} \\
&= \frac{-15-6-8}{6}\overrightarrow{AB}
\end{aligned}
$$

$$\overrightarrow{LK} = -\frac{29}{6}\overrightarrow{AB}.$$

(b) Puisque $\overrightarrow{LK} = -\frac{29}{6}\overrightarrow{AB}$, nous en déduisons :

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{LK}\right\| &= \left|-\frac{29}{6}\right| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\ &= \frac{29}{6} \times AB \\ &= \frac{29}{6} \times 6\end{aligned}$$

$$LK = 29.$$

EXERCICE 21. Soient A, B et C trois points du plan tels que :

$$3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

1. Réalisez une figure.
2. En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ peut s'écrire $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, exprimez le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BC}$ en justifiant la réponse.

Exercice 21.

1.
2. Par construction

$$3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

ce qui équivaut, d'après la relation de Chasles, à

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{AB} - 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) &= \vec{0} \\ 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} &= \vec{0}\end{aligned}$$

Finalement

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}.$$

EXERCICE 22. C Soit $MNPQ$ un parallélogramme. On définit le point R tel que $\overrightarrow{QR} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$ et le point S tel que $\overrightarrow{MS} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{MQ}$.

1. Réalisez une figure.
2. (a) En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{MR}$ peut s'écrire $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QR}$, montrez que $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MQ} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$.

   (b) En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{NS}$ peut s'écrire $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MS}$, montrez que $\overrightarrow{NS} = -\overrightarrow{MN} - \frac{4}{3}\overrightarrow{MQ}$.

   (c) Déduisez-en une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{MR}$ et $\overrightarrow{NS}$.

Exercice 22.

1.
2. (a) D'après la relation de Chasles

$$\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QR}$$

Or, d'après l'énoncé, $\overrightarrow{QR} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$, donc en substituant :

$$\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MQ} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$$

(b)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NS} &= -\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MS} \\ &= -\overrightarrow{MN} - \frac{4}{3}\overrightarrow{MQ}\end{aligned}$$

(c) $-\frac{4}{3}\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{NS}$.

EXERCICE 23. Soient $ABCD$ un parallélogramme et S et V des points tels que $\overrightarrow{AV} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CS} = 2\overrightarrow{CD}$.

Montrez que les segments $[VS]$ et $[AC]$ ont le même milieu.

Exercice 23.

En faisant à main levé une figure nous voyons que $AVCS$ est un parallélogramme et par conséquent ses diagonales se coupent bien en leur milieu. Démontrons-le proprement.

Montrons que $AVCS$ est un parallélogramme.

Pour cela nous allons démontrer que $\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{SC}$.

$$\overrightarrow{AV} = 2\overrightarrow{AB}$$

Or $ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et en remplaçant :

$$\overrightarrow{AV} = 2\overrightarrow{DC}$$

Comme, par construction, $2\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CS}$, en considérant les vecteurs opposés, nous en déduisons :

$$\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{SC}$$

Nous avons bien démontré que $\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{SC}$ et donc que $AVCS$ est un parallélogramme. Nous en déduisons que ses diagonales

$$\boxed{[VS] \text{ et } [AC] \text{ se coupent en leur milieu.}}$$

EXERCICE 24. Soient ABC un triangle rectangle en A et I est le milieu de l'hypoténuse. On appelle A' le symétrique de A par rapport à I, B' et C' les images de B et C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$.

Démontrez que A' est le milieu de $[B'C']$.

Exercice 24.

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{B'I'} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{II'}$$

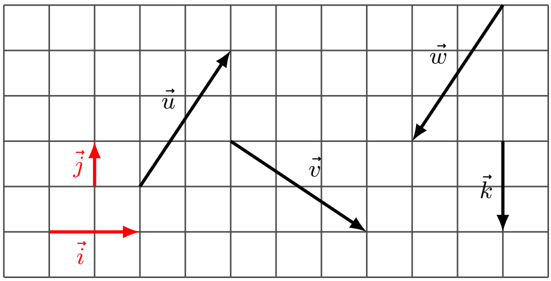
Or par construction I est milieu de $[AI']$ donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{II'}$, et $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{IA}$ donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B'I'} &= \overrightarrow{BI}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

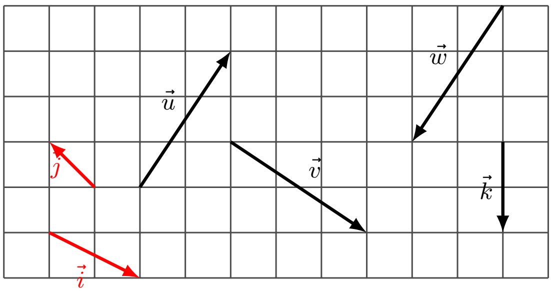
De $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CC'}$ nous déduisons que $BB'C'C$ est un parallélogramme, donc : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$.
Finalement : $\overrightarrow{B'I'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B'C'}$.

I' est le milieu de $[B'C']$.

EXERCICE 25. Exprimez les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{k}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.



EXERCICE 26. Exprimez les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{k}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.



EXERCICE 27. Donnez les coordonnées du vecteur dans la base $(\vec{a},\vec{b})$.

1. $\vec{u} = \vec{b} - 7\vec{a}$.
2. $\vec{v} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - 7\vec{a} + 4\vec{a}$.
3. $\vec{w} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD}$ où $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$ et $\overrightarrow{CD} = -2\vec{b} + 5\vec{a}$

EXERCICE 28. Exercices 49 à 51 page 188 du manuel Lelivrescolaire.
Exercice 28.

Exercice 49 page 188 du manuel Lelivrescolaire.

(a) $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{b}\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{d}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$.

(b) $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = 1\vec{i} - 4\vec{j}$, $\overrightarrow{LK} = 1\vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{FG} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = -4\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{d} = -2\vec{j}$.

Exercice 50 page 188 du manuel Lelivrescolaire.
$A(-1;1)$, $B(1;1{,}5)$, $C(4;1{,}5)$, $D(1;-1)$, $E(1;-2)$, $F(7;-2{,}5)$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0{,}5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2{,}5\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}6\\-0{,}5\end{pmatrix}$.
Les coordonnées sont les opposées des précédents.

Exercice 51 page 188 du manuel Lelivrescolaire.
$A(-2;3)$, $B(-3;2)$, $C(-4;0)$, $D(0;1)$, $E(-1;-2)$, $F(-3;0)$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$.

EXERCICE 29. Déterminez $x,y \in \mathbb{R}$ de sorte que $\vec{u} = \vec{v}$.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}x+2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\2y+3\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2x+5\\3y-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}12\\-12y+4\end{pmatrix}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}3x^2+x+7\\\frac{2}{y}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x-10\\\frac{4}{y+1}\end{pmatrix}$.

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}x^2\\y+x\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}144\\3y-4\end{pmatrix}$.

Exercice 29.

a) $(x,y) = (6,0)$.
b) $(x,y) = \left(-\frac{7}{2},\frac{3}{5}\right)$.
c) $\varnothing$.
d) $(x,y) = (12,16)$.

EXERCICE 30. Exercice 53 page 188 du manuel Lelivrescolaire.

Exercice 30.

1. $x = 3$ et $y = -4$.
2. $x = 3$ et $y = 8$.
3. $x = -6$.

EXERCICE 31. Calculez la norme des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$.

EXERCICE 32. Soient $A(-2;1)$, $B(2;4)$, $C(3;0)$ et $D(-1;-3)$ des points du plan muni d'un repère.

Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 32.

Démontrer en utilisant les vecteurs.

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Démontrons que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-(-2)\\4-1\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

De même

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}3-(-1)\\0-(-3)\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

Donc, les vecteurs ayant même coordonnées : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
Et par conséquent

$$\boxed{ABCD \text{ est un parallélogramme.}}$$

EXERCICE 33. Soient $A(-3;3)$, $B(2;5)$, $C(4;0)$ et $D(-1;-2)$ dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Calculez AC et BD.
3. Qu'en déduisez-vous sur $ABCD$?

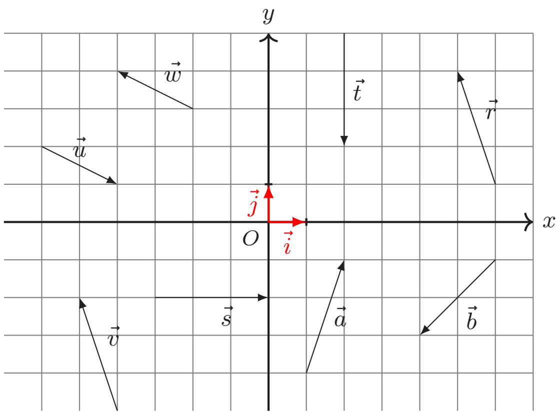
Exercice 33.

1. Il suffit de procéder comme dans l'exercice précédent
2. Le repère étant orthonormé il suffit d'utiliser la formule
   $AC = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2}$.
3. D'après les questions précédentes $ABCD$ est un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur. Autrement dit :

$$\boxed{ABCD \text{ est un rectangle.}}$$

EXERCICE 34.

Lisez les coordonnées des vecteurs représentés ci-contre et indiquez ceux qui sont égaux.



EXERCICE 35. Soient $A(7;-3)$, $B(3;2)$ et $C(-5;-4)$ des points du plan muni d'un repère.

Déterminez les coordonnées du point $D(x_D;y_D)$ qui vérifie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Exercice 35.

Déterminons x_D et y_D.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées donc si et seulement si

$$\begin{cases} 3 - 7 = x - (-5) \\ 2 - (-3) = y - (-4) \end{cases}$$

donc, si et seulement si

$$\begin{cases} x = -9 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{D(-9,1).}$$

Une rédaction alternative.

Déterminons x_D et y_D.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.
De plus $ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.
Autrement dit dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
\frac{x_A + x_D}{2} = \frac{x_B + x_C}{2} &\quad \text{et} \quad \frac{y_A + y_D}{2} = \frac{y_B + y_C}{2} \\
\frac{7 + x_D}{2} = \frac{3 + (-5)}{2} &\quad \text{et} \quad \frac{-3 + y_D}{2} = \frac{2 + (-4)}{2} \\
x_D = -9 &\quad \text{et} \quad y_D = 1
\end{aligned}$$

Nous avons démontré qu'il y a un seul point D qui satisfassent à la condition $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et ses coordonnées sont $(-9; 1)$.

EXERCICE 36. Soient $A(2; -3)$ et $B(-1; 4)$ deux points dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Calculez $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Exercice 36.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ donc $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + 7^2} = \sqrt{58}$.

EXERCICE 37. Exercices 54 page 188, 56 page 189 du manuel Lelivrescolaire.

Exercice 37.

Exercice 54 page 188 du manuel Lelivrescolaire.

(a) $G(-1; 2)$, $H(5; -2)$, $M(7; 4)$, $N(0{,}1)$, $P(3{,}0)$.

(b)

Exercice 56 page 189 du manuel Lelivrescolaire.

(a) Oui.

(b) Non.

(c) Non.

(d) Oui.

EXERCICE 38. Exercices 57 et 58 page 189 du manuel Lelivrescolaire.

Exercice 38.

Exercice 57 page 189 du manuel Lelivrescolaire.

(a) $ABCD$ est un parallélogramme car $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

(b) C est le milieu de $[BE]$ car $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CE}$.

(c) C est l'image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$ car $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DA}$.

Exercice 58 page 189 du manuel Lelivrescolaire.

(a) M' symétrique de M par la symétrie de centre P ssi P est milieu de $[MM']$, donc ssi $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PM'}$.
Donc $M'(15; -9)$.

(b) On en déduit $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PC}$ donc P milieu de $[AC]$.

(c) D'après les questions précédentes les diagonales du quadrilatère se coupent en leur milieu P.

EXERCICE 39. Dans un repère on considère les points : $A(-2;1)$, $B(3;4)$ et $C(-5;2)$.

Calculez les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Exercice 39.

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 - x + 3 - x + (-5) - x = 0 \\ 1 - y + 4 - y + 2 - y = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{M\left(-\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right).}$$

EXERCICE 40. Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$.

1. Calculez $||\vec{u}||$ et $||\vec{v}||$.
2. Calculez les coordonnées $\vec{u} + \vec{v}$.
3. Montrez que $||\vec{u} + \vec{v}|| = 5$.

CEla ilustre l'inégalité triangulaire.

Exercice 40.

1. $||\vec{u}|| = 5$ et $||\vec{v}|| = \sqrt{19}$.
2. $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.
3. $||\vec{u} + \vec{v}|| = 5$.

EXERCICE 41.

1. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$.

   (a) Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées :

   a) $\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix}1\\12\end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix}9\\-2\end{pmatrix}$.

   (b) Le vecteur $-2\vec{u}$ a pour coordonnées :

   a) $\begin{pmatrix}-4\\-5\end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix}2\\10\end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix}-4\\-10\end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix}-4\\10\end{pmatrix}$.

2. Calculez les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ si

   a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$.

Exercice 41.

1. (a) $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$.

   (b) $-2\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\10\end{pmatrix}$.
2. (a) $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$.

   (b) $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix}-1\\10\end{pmatrix}$.

EXERCICE 42. Soient les points $A(-2;1)$, $B(4;2)$ et $C(2;4)$.

1. (a) Montrez que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(6;1)$.
   (b) Calculez les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{AC}$.
   (c) Calculez les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
2. (a) Placez les points dans un repère orthonormé est dessinez le représentant d'origine A du vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
   (b) Vérifiez le résultat de la question 1.(c).

Exercice 42.

1. (a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-(-2) \\ 2-1 \end{pmatrix}$,
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (b) De même $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   (c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2.

EXERCICE 43. Déterminez les coordonnées de $-7\vec{u}$ sachant que $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 43.
$-7\vec{u}\begin{pmatrix} 21 \\ -7\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

EXERCICE 44. Les questions sont indépendantes les unes des autres (sauf les deux dernières).

1. Soient $\vec{u}(2,-1)$ et $\vec{v}(1;2)$.
   (a) Calculez les coordonnées de $3\vec{u}$ et $2\vec{v}$.
   (b) Calculez les coordonnées de $3\vec{u}+2\vec{v}$.
2. Soient $\vec{u}(5;1)$ et $\vec{v}(2;-3)$. calculez les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$, $2\vec{u}$, $-3\vec{v}$ et $2\vec{u}-3\vec{v}$.
3. Soient $\vec{u}(0;-1)$, $\vec{v}(3;4)$ et $\vec{w}(8;-6)$. Calculez la norme de chacun des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
4. Soient $\vec{u}(0;5)$ et $\vec{v}(4;-2)$.
   (a) Calculez la norme de chacun des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
   (b) Calculez les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.
   (c) Montrez que $||\vec{u}+\vec{v}|| = 5$.
5. Dites en justifiant si la proposition suivante est vraie : « Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $||\vec{u}+\vec{v}|| = ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$ ».

Exercice 44.

1. 34 page 136.
   (a) $3\vec{u}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $2\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
   (b) $3\vec{u}+2\vec{v}\begin{pmatrix} 6+2 \\ -3+4 \end{pmatrix}$ donc $3\vec{u}+2\vec{v}\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. 92 page 140.
   $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$, $2\vec{u}\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$, $-3\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}$, $2\vec{u}-3\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix}$.

3. 94 page 140.
   $||\vec{u}|| = 1$, $||\vec{v}|| = 5$, $||\vec{w}|| = 10$.
4. 95 page 140.
   (a) $||\vec{u}|| = 5$, $||\vec{v}|| = 2\sqrt{5}$.
   (b) i. $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.
       ii. $||\vec{u} + \vec{v}|| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.
5. 96 page 140.
   L'affirmation est fausse. Un contre-exemple est fourni par l'exercice précédent.

EXERCICE 45. Soient $A(-1;-2)$, $B(5;-1)$, $C(6;3)$ et $D(0;2)$ des points considérés dans un repère du plan.

1. Faites un figure.
2. Construisez le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.
3. Déterminez les coordonnées de E.
4. Démontrez que $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{BC}$.
5. Que pouvez-vous en déduire ?

EXERCICE 46. Soient ABC un triangle et K, L et M les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

1. Démontrez que $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{BM}$.

   Attendu démonstration de l'existence d'un parallélogramme double Thalès ou théorème des milieux.

2. Déduisez-en $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{KL}$.

Exercice 46.
Si aucune figure n'est demandée il est nécessaire pour aborder un tel exercice de faire un schéma.

1. Comme M est le milieu de $[BC]$:

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

Donc, d'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$$

Puisque K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} &= \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{AL}\right)\\ &= \frac{1}{2}\times 2\overrightarrow{KA} + \frac{1}{2}\times 2\overrightarrow{AL}\\ &= \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AL}\end{aligned}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\boxed{\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{KL}}$$

2. Puisque M est le milieu de $[BC]$

$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM}$$

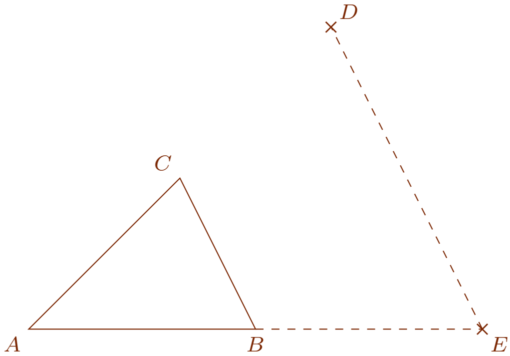
Donc, d'après la question précédente :

$$\boxed{\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{KL}.}$$

EXERCICE 47. Soient ABC un triangle, D et E des points tels que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$.

Faites une figure puis démontrez que C est le milieu du segment $[AD]$.

Exercice 47.



Nous allons utiliser une caractérisation vectorielle du milieu : C est le milieu de $[AD]$ si et seulement si $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.

Démontrons que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.

Pour démontrer cette égalité nous disposons d'informations sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{BC}$. Nous allons, avec la relation de Chasles, nous allons décomposer $\overrightarrow{AD}$ en faisant apparaître tous ces vecteurs. Autrement dit il faut trouver un chemin qui va de A à D et qui passe si possible par B et E (ou C mais il s'avérera que ce n'est pas nécessaire).

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED}$$

Comme $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED}\\ &= 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}\end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}\\ &= 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)\end{aligned}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$$

Nous en déduisons finalement

$$\boxed{C \text{ est le milieu de } [AD].}$$

Nous aurions pu aussi utiliser une variante du théorème des milieux.

EXERCICE 48. Soient $ABCD$ un carré non trivial (non réduit à un point), E le symétrique de A par rapport à B et I le milieu de $[BC]$.

1. Faites un croquis à main levé.
2. Justifiez que $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ est un repère orthonormé du plan.
3. Déterminez les coordonnées des différents points de la figure puis montrez que I est le milieu de $[DE]$.
4. Démontrez ce résultat sans utiliser de repère.

Exercice 48.

1. Par construction ABD est un triangle isocèle rectangle en A donc
$$\boxed{\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right).}$$
2. * Du fait du choix du repère : $A(0;0)$, $B(1;0)$, $D(0;1)$.
   * Puisque $ABCD$ est un carré : $C(1;0)$.
   * E est le symétrique de A par rapport à B. Autrement dit B est le milieu de $[AE]$. Nous en déduisons :
   $$x_B = \frac{x_A + x_E}{2}$$
   Ce qui équivaut successivement à :
   $$\begin{aligned} 1 &= \frac{0 + x_2}{2} \\ 1 \times 2 &= \frac{x}{2} \times 2 \\ 2 &= x_E \end{aligned}$$
   et de même pour les ordonnées :
   $$y_B = \frac{y_A + y_E}{2}$$
   Ce qui équivaut successivement à :
   $$\begin{aligned} 0 &= \frac{0 + y_2}{2} \\ 0 \times 2 &= \frac{x}{2} \times 2 \\ 0 &= y_E \end{aligned}$$
   Ainsi : $E(2{,}0)$.
   * Puisque I est le milieu de $[BC]$:
   $$\begin{aligned} x_I &= \frac{x_B + x_C}{2} \\ &= \frac{1 + 1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

et

$$y_I = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

Donc : $I\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Démontrons que I est le milieu de $[DE]$.

Nous allons simplement vérifier que le milieu de $[DE]$ et I coïncident car ils ont même coordonnées.

Si nous notons M le milieu de $[DE]$ nous avons d'une part

$$x_M = \frac{x_D + x_E}{2} = \frac{0+2}{2} = 1$$

et

$$y_M = \frac{y_D + y_E}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

Donc $M\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Puisque M et I ont même coordonnées nous pouvons affirmer

$$\boxed{I \text{ est le milieu de } [DE].}$$

3. En utilisant le théorème des milieux.

EXERCICE 49. On considère un carré $ABCD$ non réduit à un point.

1. Justifiez que $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ est un repère du plan. Est-il orthonormé ?
2. Justifiez que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et en déduire les coordonnées du point C dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.
3. On considère le point E symétrique de A par rapport à B et le point F symétrique de F par rapport à D.

   Déterminez les coordonnées des points E et F dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.
4. Que semble représenter le point C par rapport aux points E et F ? Démontrez le par au moins 3 méthodes différentes.

Exercice 49.

1. $ABCD$ est un carré donc ABD est un triangle isocèle rectangle en A. Par conséquent

$$\boxed{\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \text{ est un repère orthonormé.}}$$

2. Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, d'après l'identité du parallélogramme

$$\boxed{\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.}$$

Calculons les coordonnées de C.

* D'une part $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$,
* d'autre part $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} (1-0)+(0-0) \\ (0-0)+(1-0) \end{pmatrix}$,

nous en déduisons donc : $x_C = 1$ et $y_C = 1$.

$$\boxed{C(1;1).}$$

3. Puisque E et le symétrique de A par rapport à B, B est le milieu de $[AE]$ et, par conséquent, $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$.
Comme $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nous en déduisons $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 2\times 1 \\ 2\times 0 \end{pmatrix}$ *i.e.* $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Mais $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x_E \\ y_E \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{cases} x_E = 2 \\ y_E = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{E(2;0).}$$

En procédant de même

$$\boxed{F(0;2).}$$

4. C est le milieu de $[EF]$.
Voici trois méthodes pour le démontrer :

* Montrer avec les coordonnées que $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CF}$.
* En calculant les coordonnées du milieu de $[EF]$ nous nous rendons compte qu'elles coïncident avec celles de C.
* En utilisant le théorème des milieux. Ceci dit il faudrait expliciter le fait que C est dans le même demi-plan délimité par (AD) que F.

EXERCICE 50. Soient T, R et I trois points non alignés.
Les points U et V sont définis par : $\overrightarrow{IU} = \overrightarrow{IR} + \overrightarrow{TI}$ et $\overrightarrow{TV} = \overrightarrow{TI} + \overrightarrow{TR}$

1. Faire une figure sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Que peut-on conjecturer ?
3. (a) Démontrer que $\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{RI} + \overrightarrow{IT} + \overrightarrow{TR}$.
   (b) Conclure.

EXERCICE 51. Soient T, R et I trois points non alignés. On définit les points A, B et C par : $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{RT} - \overrightarrow{IT}$, $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{TI}$ et $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{RI}$.

1. Faire une figure sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Que peut-on conjecturer ?
3. (a) Démontrer que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}$.
   (b) En déduire une expression des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{RT}$ puis conclure.

Exercice 51.

1.
2.
3. (a) D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}\\ &= -\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}\\ &= \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}\end{aligned}$$

De même : $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}$.

(b) D'après la question précédente :

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}$$

Donc, d'après l'énoncé :