Vecteurs (introduction par les coordonnées).

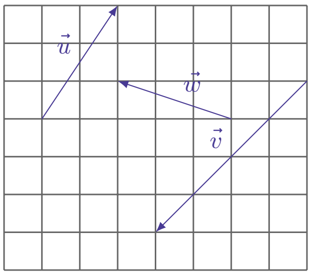
Vecteurs du plan et déplacements.

Nous souhaitons construire des déplacements dans le plan muni d'un repère à partir de deux déplacements élémentaires suivant chacun des axes.

Définition 1. Soient x et y des nombres réels nous appellerons *vecteur $\vec{u}$ de coordoonées x et y*, et nous noterons $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, le déplacement d'une longueur de $|x|$ parallélement à l'axe des abscisses dans le sens de O vers I si x est positif et dans le sens contraire sinon, suivi du déplacement d'une longueur de $|y|$ parallélement à l'axe des ordonnées dans le sens de O vers J si y est positif et dans le sens contraire sinon .

Remarques.

1. On représente géométriquement un vecteur par un segment muni d'une flêche. Ainsi les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.



2. On appelle *vecteur nul* et on note $\vec{0}$ le vecteur de coordoonées 0 et 0 qui correspond à une absence de déplacement.
3. Les déplacement dont nous parlons sont en fait des translation : transformation sans rotation, sans agrandissement et sans inversion.
4. Les vecteurs sont un outil mathématique qui permettent notamment de modéliser les translations. Nous verrons que ce n'est qu'une façon de se représenter un vecteur et qu'il en existe beaucoup d'autres : position d'un point, vitesse, accélération, champ électrique, polynômes, ...
5. Les vecteurs sont le plus souvent notés $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ mais pas exclusivement.

Définition 2. Soient $a \in \mathbb{R}$, $\vec{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$ deux vecteurs avec leurs coordonnées. On appelle *somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$*, et on note $\vec{u}+\vec{v}$, le vecteur $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \end{pmatrix}$. On appelle *produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel a*, et on note $a\vec{u}$, le vecteur $a\vec{u}\begin{pmatrix} ax_u \\ ax_v \end{pmatrix}$.

Exemples.

1. Si $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $a = -3$ alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $a\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Proposition 1. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs.

* $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$ (commutativité de la somme).

* $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$ (distributivité).
* $a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$ (distributivité).
* $\vec{u} + (\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}+\vec{v}) + \vec{w} = \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ (associativité).
* $1\vec{u} = \vec{u}$.

Démonstration. Il s'agit à chaque fois de regarder ce qui se passe sur les coordoonées et d'utiliser les propriétés semblables sur les nombres.

Remarques.

1. Autrement dit on peut calculer avec les vecteurs comme on calcule avec les nombres.
2. La multiplication d'un vecteur par un nombre se fait toujours par la gauche.
3. On ne divise pas un vecteur par un nombre. Cependant il faut se souvenir que diviser par a c'est multiplier par son inverse $\frac{1}{a}$.

Vecteur opposé.

Définition 3. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ un vecteur. On appelle *vecteur opposé* au vecteur $\vec{u}$ le vecteur noté $-\vec{u}$ défini par $-\vec{u}\begin{pmatrix} -x_u \\ -x_v \end{pmatrix}$.

Remarques.

1. Autrement dit le vecteur opposé correspond au déplacement contraire de celui de $\vec{u}$.
2. Nous retrouvons le même abus (pour simplifier) l'écriture. Au lieu d'écrire $\vec{u} + (-\vec{v})$ nous nous autoriserons à noter $\vec{u} - \vec{v}$.

Proposition 2. Soit $\vec{u}$ un vecteur. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

Remarques.

1. On retrouve la notion d'opposé au sens ou nous la connaissons pour la somme de nombres.

Base du plan.

Définition 4. On appelle *combinaison linéaire* tout calcul mélant somme de vecteurs et produit de vecteurs par des nombres.

Proposition 3. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur. Il existe une unique combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ de la base du plan qui soit égale à $\vec{u}$: $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Définition 5. Nous dirons que le couple $(\vec{i},\vec{j})$ est *une base du plan vectoriel*.

Remarques.

1. Le repère (O,I,J) pourra dorénavant être noté vectoriellement $(O;\vec{i},\vec{j})$. $\vec{i}$ permet de retrouver I à partir de O.

Norme de vecteur.

Définition 6. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ un vecteur. On appelle norme de $\vec{u}$ le nombre réel défini par : $||\vec{u}|| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}$.

1. La norme d'un vecteur est un nombre positif.
2. La norme dans le cas des déplacements s'interprête comme la longueur du déplacement comme nous nous le reverrons ci-après.

Vecteur position.

Définition 7. Soit M un point du plan de coordoonées (x,y) dans le repère (O,I,J). On appelle *vecteur position* de M le vecteur noté $\overrightarrow{OM}$ défini par $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Remarques.

1. Ainsi le vecteur position de M correspond au déplacement qui partant de O amène jusqu'à M.
2. Les physiciens préfèrent travailler avec le vecteur position plutôt qu'avec le point.

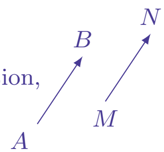
Représentant d'un vecteur.

Définition 8. Soient $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ des points du plan dont les coordonnées sont données dans un repère (O,I,J) du plan. On définit le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$.

Remarques.

1. Notons $\vec{u}$ le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Nous dirons que l'écriture $\overrightarrow{AB}$ est *un représentant du vecteur $\vec{u}$* car son écriture pourrait utiliser d'autres points du plan. Il n'y a pas unicité du représentant d'un vecteur.
2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ correspond au déplacement qui partant de A arrive en B.
3. On dit que A est l'origine du représentant et B son extrémité.
4. Si $\overrightarrow{MN}$ est un représentant d'un vecteur $\vec{u}$ alors nous décomposons en
   - la *norme du vecteur* par : $\|\vec{u}\| = MN$ (confer infra),
   - la *direction du vecteur* qui est la droite (MN) (ou une autre droite parallèle),
   - le *sens du vecteur $\vec{u}$* : de M vers N.

Deux représentants
d'une même translation,
d'un même vecteur.



Proposition 4. Soient $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ des points du plan dont les coordonnées sont données dans un repère (O,I,J) du plan. $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Remarques.

1. Ainsi le vecteur opposé correspond au déplacement contraire : l'un va de A à B l'autre de B à A.

Proposition 5. Soient $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ des points du plan dont les coordonnées sont données dans un repère orthonormal du plan. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$.