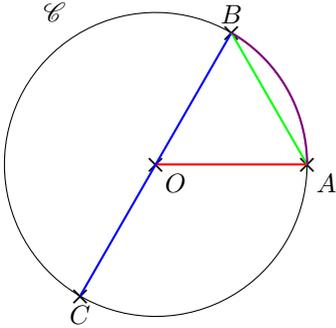


Cercles.

I Généralités.



Vocabulaire.

Le cercle désigne une ligne tandis que le disque désigne la surface délimité par le cercle.

$[OA]$ est appelé un rayon .

$[BC]$ est appelé un diamètre .

$[AB]$ est appelé une corde .

\widehat{AB} est appelé un arc .

Description du cercle.

Le cercle \mathcal{C} est l'ensemble des points du plan qui sont à la même distance de O que le point A .

Formulaire.

Longueur du cercle (ou périmètre du disque) : $2\pi OA$.

Aire du disque : πOA^2 .

Définition 1

Soient \mathcal{C} un cercle du plan et A un point de \mathcal{C} .

Une droite \mathcal{T} est appelée une *tangente à \mathcal{C} en A* si et seulement si \mathcal{T} a un unique point d'intersection avec \mathcal{C} à savoir le point A .

Proposition 1

Soient \mathcal{C} un cercle du plan de centre O et A un point de \mathcal{C} .

Pour qu'une droite \mathcal{D} soit tangente à \mathcal{C} en A il faut et il suffit que

$$A \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad \mathcal{D} \perp (OA)$$

Démonstration 1

Corollaire 1

Étant donné un cercle du plan et un point de ce cercle il existe une unique tangente à ce cercle en ce point.

Exercice 1.

Choisissez deux points distincts A et B du plan.

Tracez le cercle de centre A et de rayon AB ainsi que la tangente à ce cercle en B .

II Exercices de géométrie repérée.

Exercice 2.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) on considère le cercle \mathcal{C} de centre O et qui passe par $M(-1; 6)$.

Notons $N(5; 7)$.

Démontrez que (MN) est tangente à \mathcal{C} .

Correction exercice 2

Pour démontrer que (MN) est tangente en M à \mathcal{C} il faut et il suffit de montrer que : $M \in (MN)$ et $(MN) \perp (OM)$.

Démontrons que OMN est rectangle en M .

Le repère étant orthonormé :

$$\begin{aligned} OM &= \sqrt{(x_O - x_M)^2 + (y_O - y_M)^2} \\ &= \sqrt{[0 - (-1)]^2 + (0 - 6)^2} \\ &= \sqrt{37} \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} ON &= \sqrt{(x_O - x_N)^2 + (y_O - y_N)^2} \\ &= \sqrt{[(0 - 5)^2 + (0 - 7)^2]} \\ &= \sqrt{74} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} NM &= \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} \\ &= \sqrt{[5 - (-1)]^2 + (7 - 6)^2} \\ &= \sqrt{37} \end{aligned}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \text{d'une part} \\ ON^2 &= \sqrt{74}^2 \\ &= 74 \end{aligned}$$

et donc : $ON^2 = OM^2 + MN^2$.

et d'autre part

$$\begin{aligned} OM^2 + MN^2 &= \sqrt{37}^2 + \sqrt{37}^2 \\ &= 74 \end{aligned}$$

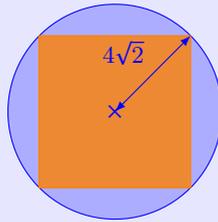
Nous en déduisons, d'après le théorème de Pythagore, que OMN est rectangle en M .
 Nous avons montré que $M \in (MN)$ et que $(MN) \perp (OM)$ donc

(MN) est tangente à M en \mathcal{C} .

III Exercices de géométrie classique.

Exercice 3.

On considère le carré inscrit dans le cercle ci-dessous.



Déterminez la valeur exacte de l'aire bleue.

Correction exercice 3

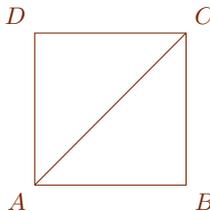
Calculons l'aire \mathcal{A}_d de la partie bleue de la figure.

* L'aire du disque bleu est

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_d &= \pi(4\sqrt{2})^2 \\ &= 32\pi\end{aligned}$$

* Déterminons la longueur x du côté du carré.

Adoptons les notations de la figure ci-dessous.



ABC est rectangle en B , on en déduit successivement d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ (2 \times 4\sqrt{2})^2 &= x^2 + x^2 \\ 8^2 \sqrt{2}^2 &= 2x^2 \\ 64 \times 2 &= 2x^2 \\ \frac{32}{2} &= \frac{2x^2}{2} \\ 64 &= x^2 \end{aligned}$$

Puisque x représente une longueur donc un nombre positif :

$$8 = x$$

En raisonnant à la grecque et en découpant convenablement le carré il est aisé de retrouver ce résultat.

Nous en déduisons l'aire du carré :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_c &= x^2 \\ &= 8^2 \\ &= 64 \end{aligned}$$

* Nous en déduisons finalement l'aire de la partie bleue :

$$\mathcal{A}_b = \mathcal{A}_d - \mathcal{A}_c$$

$$\mathcal{A}_b = 32\pi - 64.$$

Exercice 4.

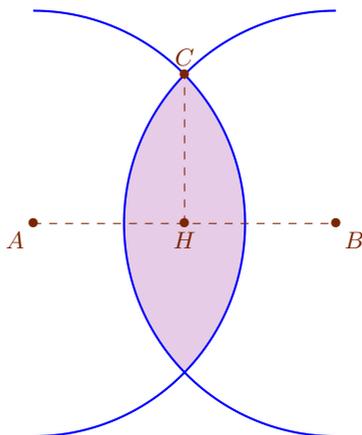
M. Seguin en a assez de voir des chèvres s'enfuir de chez lui. Il décide s'attacher Blanchette, sa dernière chèvre à deux piquets (A et B) distants de 10 m à l'aide deux cordes de 7 m de longueur.

1. Schématisez la situation à l'échelle 1/100.
2. Construisez et coloriez la zone dans laquelle Blanchette peut paître.
3. À proximité de cette zone se trouve une haie que la chèvre ne doit pas pouvoir atteindre.

À quelle distance minimale de cette haie M. Seguin doit-il planter ses piquets ?

Correction exercice 4

- 1.
- 2.

3. Calculons CH .

AHC est rectangle en H donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$AH^2 + HC^2 = AC^2$$

On en déduit successivement :

$$\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + HC^2 = 7^2$$

$$\left(\frac{10}{2}\right)^2 + HC^2 = 49$$

$$5^2 + HC^2 = 49$$

$$25 + HC^2 = 49$$

$$25 + HC^2 - 25 = 49 - 25$$

$$HC^2 = 24$$

HC étant une longueur c'est un nombre positif et donc :

$$\begin{aligned} HC &= \sqrt{24} \\ &= \sqrt{2^3 \times 3} \\ &= 2\sqrt{6} \\ &\approx 4,9 \end{aligned}$$

La haie doit être placée à plus de 4,9 m des piquets.