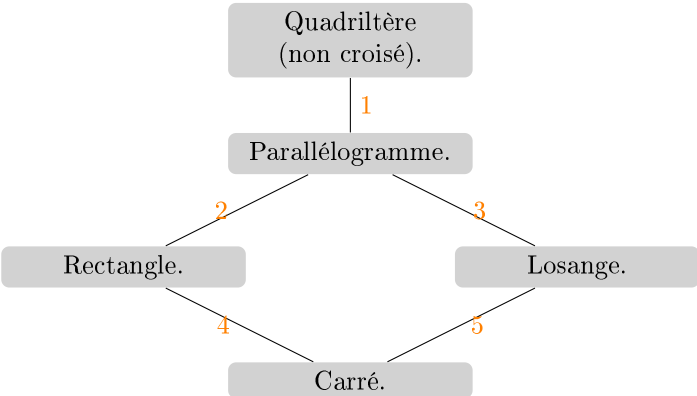
Configurations du plans.

I Quadrilatères (non croisés) du plan.



1 Parallélogramme.

Proposition 1

Pour qu'un quadrilatère soit un *parallélogramme* il faut (conditions nécessaires) et il suffit que (il n'y a pas besoin de conditions supplémentaires) :

ses diagonales se coupent en leur milieu.

On utilise aussi d'autres conditions nécessaires et suffisantes :

1. les côtés opposés sont parallèles deux à deux ;
2. les côtés opposés sont de même longueur deux à deux ;
3. deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur ;

2 Rectangle.

Pour qu'un parallélogramme soit un *rectangle* il faut et il suffit qu'il vérifie l'une des propositions suivantes :

1. il possède un angle droit ;
2. les diagonales ont même longueur ;

3 Losange.

Pour qu'un parallélogramme soit un *losange* il faut et il suffit qu'il vérifie l'une des propositions suivantes :

1. il possède deux côtés consécutifs de même longueur ;
2. les diagonales sont perpendiculaires ;

4 et 5 Carré.

Pour qu'un rectangle soit un *carré* il faut et il suffit qu'il vérifie l'une des proposition suivantes :

1. il possède deux côtés consécutifs de même longueur ;
2. les diagonales sont perpendiculaires ;

Pour qu'un losange soit un carré il faut et il suffit qu'il vérifie l'une des proposition suivantes :

1. il possède un angle droit ;
2. les diagonales ont même longueur ;

Remarques.

1. Ainsi le carré est un losange ou un rectangle particulier, le rectangle et le losange sont des parallélogrammes particuliers. Les carrés, les losanges et les rectangles sont nécessairement (*i.e.* forcément) des parallélogrammes.
2. Ce travail peut être complété en ajoutant le trapèze.
3. Certaines caractérisations ne sont plus valables si les quadrilatères sont croisés.

Exercice 1

Représentez les points proposés dans un repère orthonormé (O,I,J). Conjecturez la nature du quadrilatère ainsi construit puis démontrez cette conjecture.

1. $M(-1;3)$, $N(3;2)$, $P(3,-2)$, $Q(-2,-1)$.
2. $A(1;3)$, $B(5;1)$, $C(3,-1)$, $D(-1;1)$.
3. $E(3;1)$, $F(2;3)$, $G(-4;0)$, $H(-3,-2)$.
4. $P(-3;4)$, $Q(-2;1)$, $R(1;0)$, $S(0;3)$.
5. $U(1;3)$, $V(3,-1)$, $W(-1,-3)$, $S(-3;1)$.

Exercice 2

$[AB]$ et $[CD]$ sont deux diamètres quelconques d'un cercle $\mathcal{C}$. Quelle est la nature du quadrilatère $ACBD$?

Exercice 3

Considérons un parallélogramme $ABCD$ dans un plan muni d'un repère. Sachant que $A(-1;7)$, $B(-20;100)$, $C(3;107)$ et $D(22;y_D)$, déterminez l'ordonnée y_D du point D.

II Triangles du plan.

Les différents triangles.

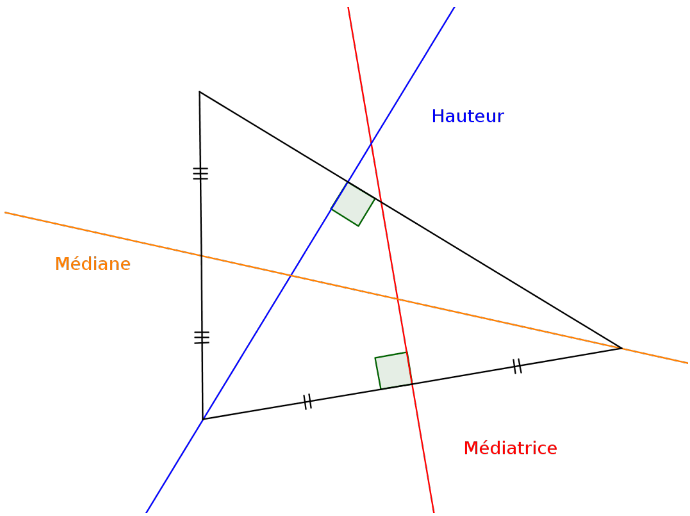
Définition 1

Les triangles peuvent être dit :
- *scalène* si les longueurs des côtés sont toutes distinctes ;
- *isocèle en* si deux côtés ont la même longueur ;
- *rectangle en* si deux côtés sont perpendiculaires ;
- *isocèle-rectangle en* si deux côtés sont perpendiculaires et on la même longueur ;
- *équilatéral* si les trois côtés ont la même longueur.

Exercice 4

Dans un repère orthonormé, on donne les points : $E(3;-2)$, $F(-2;-3)$, $G(-3;2)$. Quelle est la nature du triangle EFG ?

Les droites remarquables du triangle.



Remarques.

1. Les trois médianes du triangle se coupent en un (seul) point appelé le *centre de gravité* du triangle.
2. La médiatrice d'un segment $[AB]$ est formée de tout les points équidistant de A et de B.
3. Les trois médiatrices du triangle se coupent en un (seul) point appelé le *centre du cercle circonscrit*. En effet ce point est à égale distance des sommets du triangle.
4. Pour qu'un triangle soit rectangle il faut et il suffit que le centre du cercle circonscrit soit le milieu d'un côté.
5. Les trois hauteurs du triangle se coupent en un (seul) point appelé l'*orthocentre*.

Exercice 5

Dans un repère orthonormé du plan sont donnés les points $A(4;2)$, $B(6;-4)$ et $C(0,-2)$.

1. Démontrez que le triangle ABC est isocèle.
2. On note H le pied de la hauteur issue de B. Calculez la longueur AH, puis la longueur BH.

Exercice 6

Dans un repère orthonormé (O,I,J) on donne les points :

$$A(4;3),\ B(-1;0) \text{ et } K(3,-1)$$

Montrez que K appartient à la médiatrice de $[AB]$.

Exercice 7 pour s'entraîner.

Exercice 28 page 192 du manuel Sésamath : triangle rectangle, médiatrice, distance.

III Cercle et tangente.

Définition 2

Soient $\mathscr{C}$ un cercle du plan et A un point de $\mathscr{C}$.

Une droite $\mathcal{T}$ est appelée une *tangente à $\mathscr{C}$ en A* si et seulement si $\mathcal{T}$ a un unique point d'intersection avec $\mathscr{C}$ à savoir le point A.

Proposition 2

Soient $\mathscr{C}$ un cercle du plan de centre O et A un point de $\mathscr{C}$.

Pour qu'une droite $\mathcal{D}$ soit tangente à $\mathscr{C}$ en A il faut et il suffit que

$$A \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad \mathcal{D} \perp (OA)$$

Corollaire 1

Étant donnés un cercle du plan et un point de ce cercle il existe une unique tangente à ce cercle en ce point.

Exercice 9

Choisissez deux points distincts A et B du plan.
Tracez le cercle de centre A et de rayon AB ainsi que la tangente à ce cercle en B.

Exercice 10

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et qui passe par $M(-1;6)$.
Notons $N(5;7)$.
Démontrez que (MN) est tangente à $\mathscr{C}$.