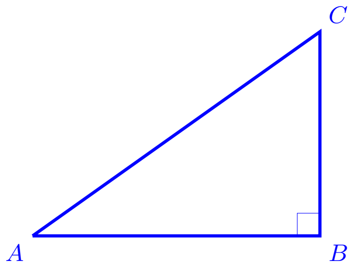
Géométrie repérée (introduction).

I Calcul de longueur.

Exercice 1

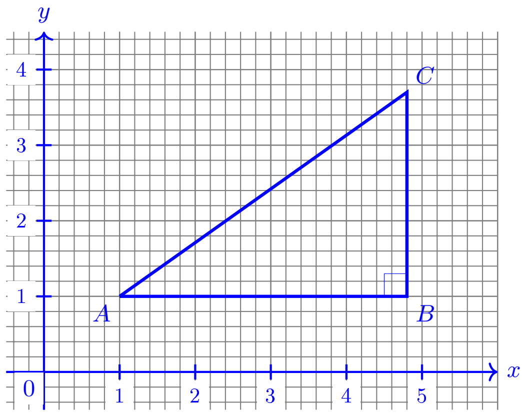
1.

Avec une règle graduée on a mesuré les longueurs : $AB = 4$ cm et $BC = 3$ cm. Déterminez la longueur AC.



2.

Lisez les longueurs AB et BC puis calculez AC en centimètres.



Exercice 2

Dans un repère orthonormé (O,I,J) sont choisis des points $W(1;5)$ et $V(5;2)$.

1. Dessinez les points W et V dans le repère (O,I,J).
2. Dessinez le point $S(1;2)$. Nous admettrons que VWS est un triangle rectangle (car (O,I,J) est orthonormé).
3. Donnez :
   (a) SV en fonction des abscisses x_V et x_W respectivement de V et W.
   (b) WS en fonction des ordonnées y_V et y_W respectivement de V et W.

puis les valeurs numériques de SV et SW.

4. Déterminez la longueur WV en fonction de x_V, x_W, y_V et y_W. Déduisez-en la valeur numérique de WV.

Définition 1

Dans un repère (O,I,J) orthonormé sont placés deux points A et B dont les coordonnées sont respectivement $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$.
La distance (euclidienne) de A à B est définie par

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Remarques.

1. Cette définition n'est valable que pour les repères orthonormés. Ce peut être un indice dans les exercices.
2. Cette formule se généralise en trois dimensions en terminale S.
3. Cette formule permet de calculer (les distances donc) les longueurs en géométrie repérée.
4. Les coordonnées sont une idée de Descartes, mais le domaine d'application des coordonnées était, à l'origine, la géométrie dont Euclide est considéré comme le père. Son ouvrage le plus célèbre, les *Éléments* (PDF ou epub), fut la base d'apprentissage de la plupart des mathématiciens jusqu'à nos jours. Il y construit de façon déductive (logique) la géométrie en partant de postulats ou axiomes (choses admises, évidentes) puis en démontrant les autres.

Exercice 3

Les points $N(1;1)$, $P(-2;-1)$ et $Q(3;-2)$ sont placés dans un repère orthonormé du plan.
Démontrez que le triangle NPQ est isocèle en N.

Correction exercice 3

NPQ est isocèle en N si et seulement si $NP = NQ$.

Calculons NP et NQ.

Le repère est orthonormé donc

$$\begin{aligned} NP &= \sqrt{(x_N - x_P)^2 + (y_N - y_P)^2} \\ &= \sqrt{(1-(-2))^2 + (1-(-1))^2} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} NQ &= \sqrt{(x_N - x_Q)^2 + (y_N - y_Q)^2} \\ &= \sqrt{(1-3)^2 + (1-(-2))^2} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

Donc $NP = NQ$ et

$$\boxed{NPQ \text{ est isocèle en } N.}$$

Exercice 4

Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O,I,J), les points $K(-1;7)$, $L(-1;4)$ et $M(3;4)$ sont choisis.

Démontrez que le triangle KLM est rectangle en L.

Correction exercice 4

Démontrons que KLM est rectangle en L.

Nous allons utiliser la réciproque du théorème de Pythagore, en calculant les longueurs des différents côtés.

Puisque le repère est orthonormé

$$\begin{aligned} KL &= \sqrt{(x_K - x_L)^2 + (y_K - y_L)^2} \\ &= \sqrt{(-1-(-1))^2 + ((7-4)^2)^2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} LM &= 4 \\ MK &= 5 \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{cases} KL^2 + LM^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \\ MK^2 = 5^2 = 25 \end{cases}$$

par transitivité : $KL^2 + LM^2 = MK^2$.

Par conséquent, d'après le théorème de Pythagore,

$$\boxed{KLM \text{ est rectangle en } L.}$$

Exercice 5

Rédigez un programme qui détermine la longueur AB en fonction des coordonnées des points A et B dans un repère orthonormé.

II Milieu d'un segment

Exercice 6

On se place dans un repère (O,I).

Déterminez sans justifier le milieu M du segment $[AB]$ dans les cas suivants en précisant son abscisse :

— $A(3)$ et $B(5)$,
— $A(2)$ et $B(5)$,
— $A(2{,}75)$ et $B(4{,}5)$,
— $A(\sqrt{3})$ et $B(\sqrt{13})$

Proposition 1

Dans un repère (quelconque) (O,I,J) sont placés deux points A et B dont les coordonnées sont respectivement $(x_A;y_A)$ et $(x_B;y_B)$.

Les coordonnées du milieu M de $[AB]$ sont

$$\left(\frac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

Exercice 7

Soient $R(2;5)$ et $S(-256;-1002)$ deux points du plan qu'on a muni d'un repère (O,I,J).

Déterminez précisément le point d'intersection du segment $[RS]$ et de sa médiatrice.

Exercice 8

Soient $A(6;5)$ et $S(2;3)$ deux points d'un repère (O,I,J).

Déterminez les coordonnées du point A' symétrique de A par rapport à S.

Exercice 9

Rédigez un programme qui donne les coordonnées du milieu d'un segment dont les coordonnées des extrémités sont connues.

```
PROGRAM:MILIEU
:Input "XA=",X
:Input "YA=",Y
:Input "XB=",U
:Input "YB=",V
:Disp "ABSCISSE
DE M",(X+U)/2,"O
RDONNEE DE M",(Y
+V)/2
```

III Exercices

Exercice 10 pour s'entraîner.

Les points $A(1;2)$, $B(-16;-15)$ et $C(-5;-26)$ sont placés dans un repère orthonormé (O,I,J). Démontrez que le triangle ABC est rectangle.

Exercice 11

Un repère orthonormé (O,I,J) du plan étant choisi, dîtes si le triangle ABC est rectangle en A dans les cas suivants :

1. $A(2;-1)$, $B(-2;1)$ et $C(1;-3)$.
2. $A(-2;-3)$, $B(3;-2)$ et $C(-4;3)$.
3. $A(-1;2)$, $B(-3;6)$ et $c(-7;1)$.
4. $A(1;3)$, $B(5;1)$ et $C(-1;-1)$.
5. $A(1;5)$, $B(-1;-1)$ et $C(6;3)$.
6. $A(-1;4)$, $B(-2;3)$ et $C(2;1)$.

Correction exercice 11

Programme pour vérifier si ABC est rectangle en A.

Entré	Saisir x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C

Traitement et sortie	Si $(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2+(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2=(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2$, alors
	  Afficher « Rectangle en A ».
	sinon
	  Afficher « Pas rectangle en A ».

```
PROGRAM:TRIANREC
:Input "XA=",A
:Input "YA=",B
:Input "XB=",C
:Input "YB=",D
:Input "XC=",E
:Input "YC=",F
:If (C-A)^2+(D-B
)^2+(E-A)^2+(F-B
)^2=(C-E)^2+(D-F
)^2
:Then
:Disp "RECTANGLE
 EN A"
:Else
:Disp "PAS RECTA
NGLE EN A"
:End
```

(lien)

Exercice 12

Exercice 16 page 191 manuel Sesamath. : Thalès ou droite des milieux, coordonnées du milieu.

Exercice 13

Soit x un nombre réel.
Nous appellerons *valeur absolue de* x le nombre $\sqrt{x^2}$ et nous le noterons $|x|$.

1. Calculez $|3|$, $|10|$ et $|\pi|$.
2. Dites si la phrase suivante est vraie ou fausse en justifiant : « quelque soit le nombre réel x, $|x| = x$ ».
3. Calculez sans aucune justification $|-2|$, $|1{,}2|$, $\left|\frac{-1}{3}\right|$ et $|-1+\pi|$.

IV Ce qu'il faut retenir.

1. Calculer une longueur grâce aux coordonnées dans un repère orthonormé.
2. Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.
3. Utiliser les théorèmes de Pythagore et Thalès.
4. Pour avoir des valeurs exacts il faudra dorénavant privilégier l'usage des coordonnées.

V Exercices Wims.

— 2ieme_geometrie_01_001_repere
— 2ieme_geometrie_01_002_repere
— 2ieme_geometrie_01_003_repere