Géométrie repéré.

De la géométrie euclidienne classique à la géométrie repérée.

Au collège vous avez étudié la géométrie et l'arithmétique telles que les Grecs les ont inventées et développées.

Une grande partie de ces connaissances sont présentées dans un ouvrage de référence : les *Éléments* de géométrie d'*Euclide* (téléchargeable en pdf et en epub). Nous savons très peu de choses d'Euclide il a vraisemblablement vécu vers 300 avant Jésus Christ dans la grande cité grecque de l'époque qu'était Alexandrie dans l'Égypte ptolémaïque.

Ce livre fut le livre d'apprentissage des mathématiques dans tous l'occident jusqu'au XVII^{e} siècle. Tous les grands mathématiciens jusqu'à cette époque découvrirent les mathématiques en étudiant cet ouvrages.

Au delà des résultats qui y sont exposés et que vous connaissez bien pour les avoir étudiés au collège (parallélisme, angles alternes, somme des angles d'un triangle, triangles semblables, identités remarquables, angles inscrit, tangente, proportion, théorème de Thalès, nombres premiers, PGCD, aire et volumes usuels) ce qui assura la pérennité des *Éléments* c'est la volonté de l'auteur de démontrer ces résultats. Son influence fut considérable dans le développement de la logique et de l'axiomatique (résultats qui ne peuvent être démontrés et doivent donc être admis) des mathématiques. Nous retrouverons dans nos cours cette volonté d'admettre un minimum d'axiomes et de démontrer si possible tous les résultats que nous rencontrerons.

Malheureusement les élèves ne retiennent bien souvent qu'une collection de résultats sans percevoir la cohérence de l'ensemble.

Il nous restent quelques résultats de cet ouvrage à étudier. En classe de seconde nous verrons l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et le fait qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Pendant près de deux mille ans ce fut l'ouvrage de référence.

Dans la géométrie euclidienne le nombre est un outil de la géométrie : il représente une longueur, une aire ou un volume. Les mathématiques prirent un virage décisif lorsqu'un mathématicien eut l'idée de ramener l'étude la géométrie à des calculs sur les nombres de façon systématique.

Cette nouvelle façon de traiter la géométrie qui fut vite utilisée par Fermat est appelée *géométrie analytique*. Le titre de cette leçon, *Géométrie repérée*, doit être compris comme une paraphrase de cette expression.

L'idée d'associer systématiquement la position d'un objet géométrique à un couple de nombres est due à René Descartes ($XVII^{\text{ième}}$). Il fut un grand mathématicien mais la postérité a surtout retenu le philosophe dont les méthodes de réflexion exposées dans son *Discours de la méthode* (pdf, epub) sont inspirées de celles des mathématiques.

Les principes de réflexion suivants notamment sont bien connus :

« Le premier était de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie, que je ne la connusse évidemment être telle : c'est-à-dire, d'éviter soigneusement la précipitation et la prévention ; et de ne comprendre rien de plus en mes jugements, que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement à mon esprit, que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute.

Le second, de diviser chacune des difficultés que j'examinerais, en autant de pour celles qu'il se pourrait, et qu'il serait requis pour les mieux résoudre.

Le troisième, de conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu, comme par degrés, jusques à la connaissance des plus composés ; et supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement les uns les autres.

Et le dernier, de faire partout des dénombrements si entiers, et des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre. »

C'est pour rendre hommage à ce grand mathématicien qu'on parle de *repère cartésien* (par opposition à d'autre système de coordonnées).

Pour vous occuper au prochain confinement (ou cyclone, ou en remplacement de la dernière série américaine).

- *Éléments*. L'ouvrage d'*Euclide*, auxquels tous les grands mathématiciens se sont frottés dont je vous recommande la lecture pour la démarche logique et pour s'amuser à retrouver les résultats de géométrie que vous connaissez déjà mais formulés de façon inhabituelle : pdf et en epub.
- *Discours de la méthode* de *Descartes*. Celui-ci est plus un ouvrage de philosophie mais il est fondateur (en prévision de la terminale peut être) : pdf, epub.

Nous utiliserons cette année vos connaissances antérieures de géométrie. Notamment sur les

— quadrilatères, (pdf) (pdf correction),
— triangles, (pdf) (pdf correction),
— cercles, (pdf) (pdf correction).

Repère d'une droite.

Définition 1. Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan. On appelle *repère de la droite* $\mathscr{D}$ tout couple (O,I) de deux points distincts de $\mathscr{D}$.

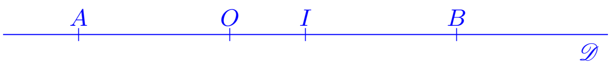
Remarques.

1. L'ordre dans un couple compte : (O,I) et (I,O) sont deux repères distincts.
2. Pour la droite (AB) les repères naturels sont (A,B) et (B,A).
3. Les unités de longueur n'ont pas beaucoup d'intérêt en mathématique. Un calcul qu'il concerne des centimètres ou des année-lumières est toujours le même pour les mathématiciens. Les unités sont issues de choix historiques arbitraires qui n'ont pas leur place en mathématique. En choisissant un repère sur une droite nous choisissons pour unité la longueur OI : $OI = 1$.

Définition 2. Soient $\mathscr{D}$ une droite, (O,I) un repère de $\mathscr{D}$ et $M \in \mathscr{D}$. On appelle *abscisse du point* M la longueur AM si $M \in [OI)$ et son opposé sinon.

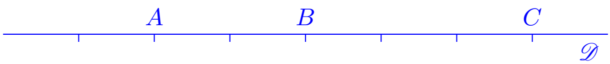
Exemples.

1. On a dessiné ci-dessous une droite $\mathscr{D}$ munie d'un repère (O,I).



L'abscisse de A dans le repère (O,I) est -2 et celle de B est 3.

2. On considère une droite $\mathscr{D}$ et divers points sur celle-ci.



Dans le repère (A,B) l'abscisse de B est 1. Dans le repère (C,B) l'abscisse de A est $\frac{2}{3}$. Dans le repère (B,A) l'abscisse de C est $-1{,}5$.

Remarques.

1. Sans être une notation internationale, l'usage est bien établi de noter de façon générique x_A l'abscisse du point A. De même x_M désigne l'abscisse de M, et cetera.

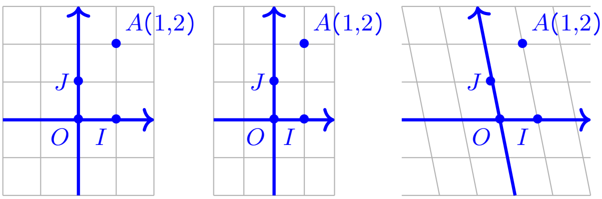
Repère du plan.

Un repère est une façon de donner des indication numériques sur la position d'un objet géométrique dans le plan.

Définition 3. Nous appellerons *repère cartésien du plan* la donnée, dans cet ordre, de trois points O, I et J du plan euclidien non alignés et distincts deux à deux. Nous le noterons (O,I,J).

(i) Le repère (O,I,J) est dit *orthogonal* lorsque le triangle OIJ est rectangle en O.
(ii) Le repère (O,I,J) est dit *orthonormal*, ou *orthonormé*, lorsque le triangle OIJ est isocèle rectangle en O.

Exemples.



Remarques.

1. On pourrait ajouter un nouveau point K et considérer le repère (O,I,J,K) pour passer d'un espace à deux dimensions à un espace à trois dimensions. Ce qui sera fait en terminale.
2. Nous appellerons *axe des abscisses* *i.e.* la droite (OI) orientée de O vers I muni de graduations correspondant à $OI = 1$. De même pour l'*axe des ordonnées*.
3. Il existe d'autres méthodes de repérage des points : le repérage avec les coordonnées polaires qui est plus adapté pour décrire des trajectoires circulaires.

Définition 4. Soient (O,I,J) un repère orthogonal, M un point du plan. On appelle coordonnées de M le couple de nombres réels (a,b) où a est l'abscisse du projeté orthogonal de M sur (OI)dans le repère (O,I) et b est l'abscisse du projeté orthogonal de M sur (OJ)dans le repère (O,J).

Remarques.

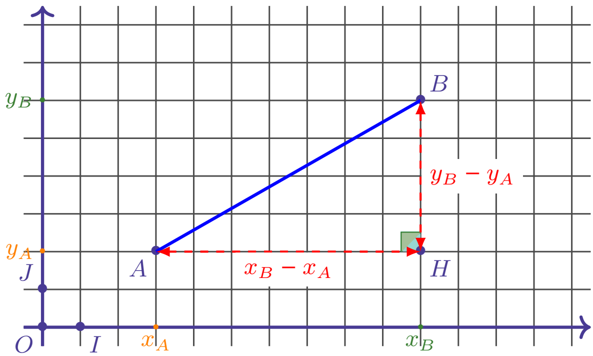
1. Dans un couple de coordonnées la première coordonnée est (toujours) l'*abscisse* et la seconde l'*ordonnée*.
2. L'usage est bien établi de noter de façon générique y_A l'ordonnée du point A. De même y_M désigne l'ordonnée de M.
3. Dans un repère qui ne serait pas orthogonal il faudrait utiliser des projections parallèlement aux axes.

Distance entre points du plan.

Définition 5. Dans un repère (O,I,J) orthonormé sont placés deux points A et B dont les coordonnées sont respectivement $(x_A;y_A)$ et $(x_B;y_B)$. La distance (euclidienne affine) de A à B est définie par $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

Remarques.

1. Cette formule permet de calculer (les distances donc) les longueurs en géométrie repérée. Elle sera donc utiliser avec des résultats utilisant les longueurs : théorème de Thalès, théorème de Pythagore, calculs d'aires.
2. Cette définition n'est valable que pour les repères orthonormés. Ce peut être un indice dans les exercices.
3. Cette formule généralise la distance vue avec la valeur absolue : pour A et B des points de la droite numérique, $AB = |x_A - x_B| = \sqrt{(x_A - x_B)^2}$. Elle se généralise en trois dimensions comme vous le verrez en terminale : $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$.
4. Cette formule est également appelée formule de la *moyenne géométrique*.
5. Cette formule est ici introduite comme une définition cependant il est possible de faire le lien avec la géométrie classique et les distance sur les axes gradués grâce au théorème de Pythagore :



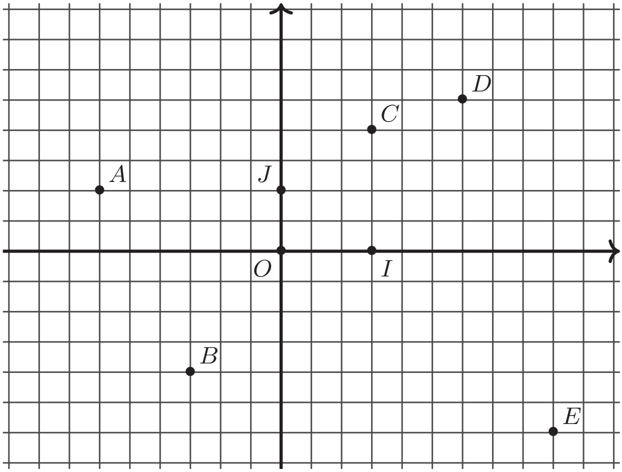
Exemples.

1. Si $K(-1;3)$ et $L(7{,}13)$ dans un repère orthonormal du plan alors :

$$\begin{aligned} KL &= \sqrt{(xL - x_K)^2 + (y_L - y_K)^2} \\ &= \sqrt{(7-(-1))^2 + (13-3)^2} \\ &= \sqrt{136} \\ &= 2\sqrt{34} \end{aligned}$$

Exercices.

EXERCICE 1. Dans le repère $(O{,}I{,}J)$ ci-dessous



1. déterminez les coordonnées des points A, B, C, D et E ;
2. placez les points

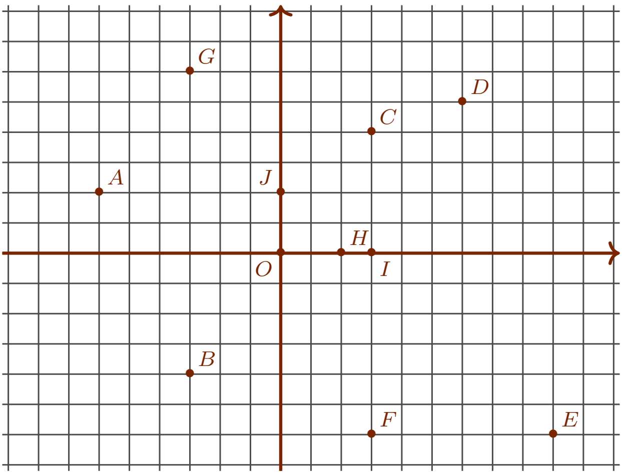
   a) $F(1;-2)$, b) $G(-1;3)$, c) $H\left(\frac{2}{3};0\right)$.

Exercice 1.

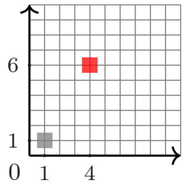
1. Il faut être vigilant : ici le repère n'est pas orthonormé mais simplement orthogonal. Une unité sur l'axe des abscisses correspond à 3 carreaux et une unité sur l'axe des ordonnées correspond à 2 carreaux.

   $A(-2;1)$, $B(-1;-2)$, $C(1;2)$, $D(2;2{,}5)$ et $E(3;-3)$.

2.



EXERCICE 2. L'affichage sur un moniteur (écran) est constitué de pixels, *i.e.* de tout petits carrés illuminés d'une seule couleur à la fois. Il est possible de repérer chaque pixel par ses coordonnées.



Lors de la création d'un jeu vidéo l'affichage d'un personnage sera centré sur un pixel.

Afin de déplacer le personnage (ici le lutin sous Scratch) vers la droite ou vers la gauche le programme suivant est créé. Le lutin apparaît au pixel de coordonnées (0,0).

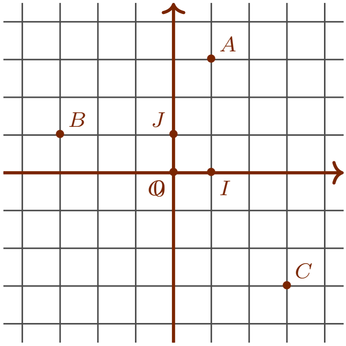
1. Donnez les abscisses et ordonnées du lutin si l'utilisateur appuie sur la touche « bas ».
2. Donnez les abscisses et ordonnées du lutin si l'utilisateur appuie successivement sur la touche « bas », la touche « gauche », la touche « bas » et à nouveau la touche « bas ».
3. Proposez un enchaînement de touches sur lesquelles appuyer afin que le lutin se retrouve au point de coordonnées $(-90{,}30)$.
4. Expliquez pourquoi il est impossible que le lutin se retrouve au point de coordonnées $(25,-60)$.
5. Quelle transformation du plan est appliquée au lutin lorsqu'une instruction ajouter ◯ à … est réalisée ?

Exercice 2. En algorithmique , pour l'instant , les réponses sont relativement peu argumentées. l'essentiel est de lire est comprendre le fonctionnement et le rôle de l'algorithme.

1. Si l'utilisateur appuie sur la touche bas le lutin voit ses coordonnées modifiées (donc il se déplace) la variable y qui représente son ordonnée est diminuée de 10 donc ses nouvelles coordonnées sont $(0;-10)$.
2. Puisqu'on appuie 3 fois sur « bas » et 1 fois sur « gauche » ses nouvelles coordonnées (en partant de l'origine du repère) sont $(-30;-10)$.
3. $-90 = 9\times(-10)$ donc il a fallu se déplacer 9 fois vers la gauche. Puisque $30 = 3\times 10$ il a fallu se déplacer 3 fois vers le haut.
4. 25 n'est pas un multiple de 10 il est donc impossible qu'un déplacement conduise à cette position.
5. Le lutin n'est tourné (rotation), il n'est pas retourné (symétrie axiale), il n'est ni agrandi ni réduit par conséquent il s'agit d'une translation.

EXERCICE 3. Tracez un repère orthonormé (O,I,J) (1 cm ou un carreau pour unité) puis placez les points : $A(1;3)$, $B(-3;1)$ et $C(3,-3)$.

Exercice 3.



EXERCICE 4. Les points $N(1;1)$, $P(-2;-1)$ et $Q(3;-2)$ sont placés dans un repère orthonormé du plan. Démontrez que le triangle NPQ est isocèle en N.

Exercice 4. NPQ est isocèle en N si et seulement si $NP = NQ$.

Calculons NP et NQ.

Le repère est orthonormé donc

$$\begin{aligned} NP &= \sqrt{(x_N - x_P)^2 + (y_N - y_P)^2} \\ &= \sqrt{(1-(-2))^2 + (1-(-1))^2} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} NQ &= \sqrt{(x_N - x_Q)^2 + (y_N - y_Q)^2} \\ &= \sqrt{(1-3)^2 + (1-(-2))^2} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

Donc $NP = NQ$ et

$$\boxed{NPQ \text{ est isocèle en } N.}$$

EXERCICE 5. Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O,I,J), les points $K(-1;7)$, $L(-1;4)$ et $M(3;4)$ sont choisis. Démontrez que le triangle KLM est rectangle en L.

Exercice 5. Démontrons que KLM est rectangle en L.

Nous allons utiliser la réciproque du théorème de Pythagore, en calculant les longueurs des différents côtés.

Puisque le repère est orthonormé

$$\begin{aligned} KL &= \sqrt{(x_K - x_L)^2 + (y_K - y_L)^2} \\ &= \sqrt{(-1-(-1))^2 + ((7-4)^2)^2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

De même

$$LM = 4$$
$$MK = 5$$

Comme

$$\begin{cases} KL^2 + LM^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \\ MK^2 = 5^2 = 25 \end{cases}$$

par transitivité : $KL^2 + LM^2 = MK^2$.

Par conséquent, d'après le théorème de Pythagore,

KLM est rectangle en L.

EXERCICE 6. Dans un repère orthonormé on considère les points $I(4;-50)$ et $M(25;13)$ démontrez que M appartient au cercle de centre I et de rayon $21\sqrt{10}$.

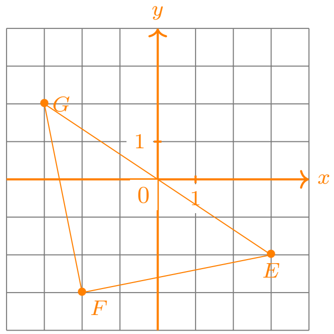
EXERCICE 7. Rédigez une fonction Python ou en Scratch qui détermine la longueur AB en fonction des coordonnées des points A et B dans un repère orthonormé.

Exercice 7. Voici une fonction en Python qui calcul la longueur AB lorsque $A(x;y)$ et $B(u;v)$.

```
from math import *
def dis(x,y,u,v):
print("AB=",sqrt((x-u)**2+(y-v)**2))
```

EXERCICE 8. Dans un repère orthonormé, on donne les points : $E(3;-2)$, $F(-2;-3)$, $G(-3;2)$. Quelle est la nature du triangle EFG ?

Exercice 8. Dessinons le triangle afin de conjecturer la nature de EFG.



Il semble que EFG soit isocèle rectangle en F.

* Démontrons que EFG est isocèle en F.
  Le repère étant orthonormé :

$$\begin{aligned} EF &= \sqrt{(x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2} \\ &= \sqrt{[3-(-2)]^2 + [-2-(-3)]^2} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} FG &= \sqrt{(x_F - x_G)^2 + (y_F - y_G)^2} \\ &= \sqrt{[-2-(-3)]^2 + (-3-2)^2} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

Donc : $EF = FG$. Autrement dit

EFG est isocèle en F.

* Démontrons que EFG est de plus rectangle en F.

Le repère étant orthonormé :

$$\begin{aligned} EG &= \sqrt{(x_E - x_G)^2 + (y_E - y_G)^2} \\ &= \sqrt{[3-(-3)]^2 + (-2-2)^2} \\ &= \sqrt{52} \end{aligned}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} EG^2 &= \sqrt{52}^2 \\ &= 52 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} EF^2 + FG^2 &= \sqrt{26}^2 + \sqrt{26}^2 \\ &= 52 \end{aligned}$$

et donc : $EG^2 = EF^2 + FG^2$.
Nous en déduisons, d'après le théorème de Pythagore, que

$\boxed{EFG \text{ est rectangle en } F.}$

$\boxed{\text{Nous avons démontré que } EFG \text{ est isocèle rectangle en } F.}$

EXERCICE 9. Dans un repère orthonormé du plan sont donnés les points $A(4;2)$, $B(6;-4)$ et $C(0,-2)$.

1. Démontrez que le triangle ABC est isocèle.
2. On note H le pied de la hauteur issue de B. Calculez la longueur AH, puis la longueur BH.

Exercice 9.

1. Démontrons que ABC est isocèle en B.
   Pour cela il suffit de démontrer que $AB = BC$.

   Le repère étant orthonormé :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \\ &= \sqrt{(4-6)^2 + (2-(-4))^2} \\ &= \sqrt{40} \\ &= 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} \\ &= \sqrt{(6-0)^2 + (-4-(-2))^2} \\ &= \sqrt{40} \\ &= 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

   Donc : $AB = BC$ et

   $\boxed{ABC \text{ est isocèle en } B.}$

2. Déterminons la longueur AH.
   H n'est pas que le pied de la hauteur issue de B. En effet, ABC est isocèle en B, donc la hauteur issue de B se confond avec la médiane issue de B (par symétrie). Ainsi H est aussi le milieu de $[AC]$. Donc :

$$AH = HC = \frac{AC}{2}$$

Calculons la longueur AC.

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} \\ &= \sqrt{(4-0)^2 + (2-(-2))^2} \\ &= \sqrt{32} \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{AH = HC = 2\sqrt{2}.}$$

Déterminons la longueur BH.
(BH) étant une hauteur de ABC, le triangle ABH est rectangle en H. Nous en déduisons, d'après le théorème de Pythagore que

$$AH^2 + HB^2 = AB^2$$

Cette dernière égalité équivaut successivement à

$$\begin{aligned} \sqrt{32}^2 + HB^2 &= \sqrt{40}^2 \\ 32 + HB^2 &= 40 \\ 32 + HB^2 - 32 &= 40 - 32 \\ HB^2 &= 8 \end{aligned}$$

et HB étant une longueur donc positive

$$\begin{aligned} HB &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Et donc

$$\boxed{BH = 2\sqrt{2}.}$$

EXERCICE 10. Dans un repère orthonormé (O,I,J) on donne les points :

$$A(4;3),\ B(-1;0) \text{ et } K(3,-1)$$

Montrez que K appartient à la médiatrice de $[AB]$.

Exercice 10. K appartient à la médiatrice de $[AB]$ si et seulement si $AK = KB$.

Démontrons que $AK = KB$.

Le repère est orthonormé donc :

$$\begin{aligned} AK &= \sqrt{(x_A - x_K)^2 + (y_A - y_K)^2} \\ &= \sqrt{(4-3)^2 + [3-(-1)]^2} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} KB &= \sqrt{(x_K - x_B)^2 + (y_K - y_B)^2} \\ &= \sqrt{[3-(-1)]^2 + (-1-0)^2} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

donc : $AK = KB$.

Et par conséquent

$$\boxed{K \text{ appartient à la médiatrice de } [AB].}$$

Coordonnées du milieu d'un segment.

Nous allons généraliser un résultat vu avec la valeur absolue.

L'abscisse du milieu, M, de $[AB]$ est $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$.

Proposition 1. Dans un repère (quelconque) (O,I,J) sont placés deux points A et B dont les coordonnées sont respectivement $(x_A ; y_A)$ et $(x_B ; y_B)$. Les coordonnées du milieu M de $[AB]$ sont $x_M = \frac{x_A+x_B}{2}$ et $y_M = \frac{y_A+y_B}{2}$.

Exercices

EXERCICE 11. Soient $R(2;5)$ et $S(-256;-1002)$ deux points du plan qu'on a muni d'un repère (O,I,J). Déterminez précisément le point d'intersection du segment $[RS]$ et de sa médiatrice.

Exercice 11. Le point d'intersection de $[RS]$ et de sa médiatrice est le milieu M de $[RS]$.

Déterminons les coordonnées de M.

Puisque M est le milieu de $[RS]$:

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_R + x_S}{2} \\ &= \frac{2 + (-256)}{2} \\ &= -127 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_M &= \frac{y_R + y_S}{2} \\ &= \frac{5 + (-1002)}{2} \\ &= -\frac{997}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{M\left(-157; -\frac{997}{2}\right).}$$

EXERCICE 12. Soient $A(6;5)$ et $S(2;3)$ deux points d'un repère (O,I,J). Déterminez les coordonnées du point A' symétrique de A par rapport à S.

Exercice 12. A' est le symétrique de A par rapport à S si et seulement si S est le milieu de $[AA']$.

Déterminons les coordonnées de A'.

Puisque S est milieu de $[AA']$ nous devons avoir :

$$x_S = \frac{x_A + x_{A'}}{2}$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{6 + x_{A'}}{2} \\ 2\times2 &= \frac{6 + x_{A'}}{2}\times2 \\ 4 &= 6 + x_{A'} \\ 4-6 &= 6 + x_{A'}-6 \\ -2 &= x_{A'} \end{aligned}$$

De même, en travaillant avec les ordonnées, nous obtenons $y_{A'} = 1$.

Enfin :

$$\boxed{A'(-2;1).}$$

EXERCICE 13. Rédigez un programme en Python qui donne les coordonnées du milieu d'un segment dont les coordonnées des extrémités sont connues.

EXERCICE 14. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;I,J)$. On construit un triangle PAT dont les sommets ont pour coordonnées respectives $(-2;4)$, $(0;-1)$ et $(5;-2)$. Le point E est le milieu du segment $[AT]$. La parallèle à (TP) passant par E coupe (PA) en F. Quelles sont les coordonnées de F ?

EXERCICE 15. Considérons un parallélogramme $ABCD$ dans un plan muni d'un repère. Sachant que $A(-1;7)$, $B(-20;100)$, $C(3;107)$ et $D(22;y_D)$, déterminez l'ordonnée y_D du point D.

Exercice 15. Déterminons l'ordonnée de D.

Notons M le milieu de $[AC]$.

Nous avons

$$\begin{aligned} y_M &= \frac{y_A + y_C}{2} \\ &= \frac{7+3}{2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Et puisque M est aussi le milieu de $[BD]$.

$$\begin{aligned} y_M &= \frac{y_B + y_D}{2} \\ 5 &= \frac{-20 + y_D}{2} \\ 5\times 2 &= \frac{-20 + y_D}{2}\times 2 \\ 10 &= \frac{(-20 + y_D)\times 2}{2\times 1} \\ 10 &= -20 + y_D \\ 10+20 &= -20 + y_D + 20 \\ 30 &= y_D \end{aligned}$$

$$\boxed{y_D = 30.}$$

EXERCICE 16. Dans le repère orthonormé $(O;I,J)$ d'unité 1 cm, on considère les points suivants : $A(6;0)$, $B(0;4)$ et $C(1;-1)$.

1. Faire une figure.
2. Prouver que le triangle ABC est rectangle.
3. On appelle K le milieu du segment $[AB]$.
   (a) Calculer les coordonnées de K.
   (b) Prouver que K appartient à la médiatrice de $[OC]$.

Exercice 16.

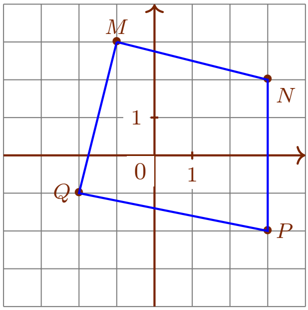
1.
2. $AB = \sqrt{52}$, $BC = \sqrt{26}$ et $AC = \sqrt{26}$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore ABC est rectangle en C.
3. (a) $K(3;2)$.
   (b) $KO = OC = \sqrt{13}$.

EXERCICE 17. Représentez les points proposés dans un repère orthonormé (O,I,J). Conjecturez la nature du quadrilatère ainsi construit puis démontrez cette conjecture.

1. $M(-1;3)$, $N(3;2)$, $P(3,-2)$, $Q(-2,-1)$.
2. $A(1;3)$, $B(5;1)$, $C(3,-1)$, $D(-1;1)$.
3. $E(3;1)$, $F(2;3)$, $G(-4;0)$, $H(-3,-2)$.
4. $P(-3;4)$, $Q(-2;1)$, $R(1;0)$, $S(0;3)$.
5. $U(1;3)$, $V(3,-1)$, $W(-1,-3)$, $S(-3;1)$.

Exercice 17.

1. Conjecturons le résultat en dessinant la situation.



Le quadrilatère ne semble pas même être un parallélogramme.

2. $ABCD$ semble être un parallélogramme démontrons-le.

Notons M le milieu de $[AC]$. Nous avons

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1+3}{2} = 2 \qquad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3+(-1)}{2} = 1$$

Donc : $M(2;1)$.

Notons N le milieu de $[BD]$. Nous avons

$$x_N = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{5+(-1)}{2} = 2 \qquad y_N = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

Donc : $N(2;1)$

Par conséquent : $M = N$.

Les diagonales de $ABCD$ se coupant en leur milieu nous pouvons affirmer que

$ABCD$ est un parallélogramme.

3. Démontrons que $EFGH$ est un rectangle.

Démontrons tout d'abord que $EFGH$ est un parallélogramme.

Notons I le milieu de $[EG]$. Nous avons

$$x_I = \frac{x_E + x_G}{2} = \frac{3+(-4)}{2} = -\frac{1}{2} \qquad y_I = \frac{y_E + y_G}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

Donc : $I\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Notons J le milieu de $[FH]$. Nous avons

$$x_J = \frac{x_F + x_H}{2} = \frac{2+(-3)}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$y_J = \frac{y_F + y_H}{2} = \frac{3+(-2)}{2} = \frac{1}{2}$$

Donc : $J\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.
Ainsi : $I = J$. Autrement dit les diagonales de $EFGH$ se coupent en leur milieu et donc $EFGH$ est un parallélogramme.

Démontrons que le parallélogramme $EFGH$ est un rectangle.
Il suffit de montrer que, par exemple, ses diagonales sont de même longueur.
(O,I,J) étant orthonormé :

$$\begin{aligned} EG &= \sqrt{(x_E - x_G)^2 + (y_E - y_G)^2} \\ &= \sqrt{[3-(-4)]^2 + (1-0)^2} \\ &= \sqrt{50} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} FH &= \sqrt{(x_F - x_H)^2 + (y_F - y_H)^2} \\ &= \sqrt{[2-(-3)]^2 + [3-(-2)]^2} \\ &= \sqrt{50} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

Donc : $EG = FH$. $EFGH$ est donc un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur.
Autrement dit :

$EFGH$ est un rectangle.

4. Démontrons que $PQRS$ est un losange.
Démontrons tout d'abord que $PQRS$ est un parallélogramme.
Notons I le milieu de $[PR]$. Nous avons

$$x_I = \frac{x_P + x_R}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1$$

$$y_I = \frac{y_P + y_R}{2} = \frac{4+0}{2} = 2$$

Donc : $I\,(-1;2)$.

Notons J le milieu de $[QS]$. Nous avons

$$x_J = \frac{x_Q + x_S}{2} = \frac{-2+0}{2} = -1$$

$$y_J = \frac{y_Q + y_S}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$$

Donc : $J\,(-1;2)$.
Ainsi : $I = J$. Autrement dit les diagonales de $PQRS$ se coupent en leur milieu et donc $PQRS$ est un parallélogramme.

Démontrons que le parallélogramme $PQRS$ est un losange.
Il suffit de montrer que, par exemple, que deux côtés consécutifs sont de même longueur.

(O,I,J) étant orthonormé :

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} \\ &= \sqrt{[-3-(-2))^2 + (4-1)^2} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} QR &= \sqrt{(x_Q - x_R)^2 + (y_Q - y_R)^2} \\ &= \sqrt{(-2-1)^2 + (1-0)^2} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

Donc : $PQ = QR$. $PQRS$ est donc un parallélogramme dont deux côtés consécutifs ont même longueur. Autrement dit :

$PQRS$ est un losange.

5. Démontrons que $UVWS$ est un carré.
   Démontrons tout d'abord que $UVWS$ est un parallélogramme.
   Notons I le milieu de $[UW]$. Nous avons

$$\begin{aligned} x_I &= \frac{x_U + x_W}{2} \\ &= \frac{1+(-1)}{2} \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_I &= \frac{y_U + y_W}{2} \\ &= \frac{3+(-3)}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc : $I\,(0;0)$.

Notons J le milieu de $[VS]$. Nous avons

$$\begin{aligned} x_J &= \frac{x_V + x_S}{2} \\ &= \frac{3+(-3)}{2} \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_J &= \frac{y_V + y_S}{2} \\ &= \frac{-1+1}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc : $J\,(0)$.
Ainsi : $I = J$. Autrement dit les diagonales de $PQRS$ se coupent en leur milieu et donc $PQRS$ est un parallélogramme.

Démontrons que le parallélogramme $UVWS$ est un losange.
Il suffit de montrer que, par exemple, que deux côtés consécutifs sont de même longueur.
(O,I,J) étant orthonormé :

$$\begin{aligned} UV &= \sqrt{(x_U - x_V)^2 + (y_U - y_V)^2} \\ &= \sqrt{(1-3)^2 + [3-(-1)]^2} \\ &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} VW &= \sqrt{(x_V - x_W)^2 + (y_V - y_W)^2} \\ &= \sqrt{[3-(-1)]^2 + [-1-(-3)]^2} \\ &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Donc : $UV = VW$. $UVWS$ est donc un parallélogramme dont deux côtés consécutifs ont même longueur. Autrement dit c'est un losange.

Démontrons que le losange $UVWS$ est un carré.
Il suffit par exemple de démontrer que $UVWS$ a des diagonales de même longueur.
(O,I,J) étant orthonormé :

$$\begin{aligned} UW &= \sqrt{(x_U - x_W)^2 + (y_U - y_W)^2} \\ &= \sqrt{[1-(-1)]^2 + [3-(-3)]^2} \\ &= \sqrt{85} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} VS &= \sqrt{(x_V - x_S)^2 + (y_V - y_S)^2} \\ &= \sqrt{[3-(-3)]^2 + (-1-1)^2} \\ &= \sqrt{85} \end{aligned}$$

Donc : $UW = VS$. $UVWS$ est donc un losange dont les diagonales ont même longueur. Autrement dit :

$UVWS$ est un carré.

EXERCICE 18. Résolvez le problème suivant en utilisant un repère judicieusement choisi. Soit $ABCD$ un parallélogramme. On note I le milieu de $[AD]$ et E l'image de B par la symétrie de centre I. Montrez que D est le milieu de $[CE]$.

EXERCICE 19. Résolvez le problème suivant en utilisant un repère judicieusement choisi. Soit $ABCD$ un rectangle tel que $BC = 5$ et $DC = 8$. Soient $M \in [AB]$ tel que $AM = 3$ et $I \in [AD]$ tel que $AJ = 3$. Déterminez la nature du triangle MJC.

EXERCICE 20. Soient OAB un triangle, A' et B' les symétriques respectifs de O par apport à A et B. On note I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[A'B']$. On se place dans le repère (O,A,B).

1. Donnez, en justifiant, les coordonnées des points I, A', B' et J.
2. Les points O, I et J sont-ils alignés ?

EXERCICE 21. On considère dans un repère orthonormé $A(-2;2)$, $B(3;7)$ et $C(10;8)$.

1. Démontrez que $H(4;5)$ est le projeté orthogonal de B sur (AC).
2. Comment appelle-t-on (HB) pour le triangle ABC ?
3. Calculez la distance $d(B;(AC))$ de B à (AC).

Exercice 21.

1. * $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AH}$ donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et donc A, C et H sont alignés.
   On a bien $H \in (AC)$.
   * $AH^2 = 45$, $AB^2 = 50$ et $HB^2 = 5$ donc AHB est rectangle en H.
   On a bien $(BH) \perp (AC)$.

   H est le projeté orthogonal de B sur (AC).

2. (HB) passe par le sommet B et est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet donc

   (HB) est la hauteur de ABC issue de B.

3. Puisque H est le projeté orthogonal de B sur (AC) : $d(B;(AC)) = BH$ et donc

   $BH = \sqrt{5}$.