Inclusions des ensembles de nombres classiques.

À cette étape de votre scolarité les nombres ont de multiples formes : nombres entiers, écritures décimales, fractionnaires, écritures scientifiques.

Faisons un peu de ménage dans cet embrouillamini.

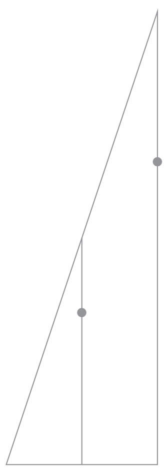
Une petite histoire des nombres.

Les premiers nombres servaient à dénombrer, c'est-à-dire à compter les objets : 1, 2, 3, et ainsi de suite. Si cela nous paraît naturel, que l'on songe à l'effort de conceptualisation qu'il fallut faire pour considérer qu'il y avait quelque chose de commun entre 3 souris et 3 éléphants.

Le nombre est un objet qui ne se préoccupe pas de ce qu'on observe. Il n'est associé à aucune sorte particulière d'objets à aucune unité de mesure.

Il fallut faire des partages et les fractions firent leur apparition. Mais dans un premier temps il s'agissait de méthodes de calcul et non de nombres. Ainsi dans l'antiquité grecque les fractions étaient considérées comme des ratios c'est-à-dire des rapports entre des longueurs et non comme des nombres ; il s'agissait d'un lien ente deux nombres et non d'un unique nombre. Mais les Grecs furent embêtés par un nombre qui n'existait pas : $\sqrt{2}$. En effet, s'il est possible de dessiner cette longueur, il est impossible de l'exprimer dans un ratio avec les nombres entiers (nombres incommensurables).

Pour les Grecs il n'y avait pas d'unité officielle de mesure. L'important n'était pas le nombre mais les rapports de grandeurs. D'où l'importance du théorème de Thalès il fallait un outil forcément géométrique pour reproduire des rapports de longueurs.



Il fallut très longtemps pour que l'absence d'objet put être considérée comme un nombre. Les nombres sont nés pour la comptabilité et la géométrie (au sens littéral de mesure de la Terre) domaines qui s'intéresse à ce qui est, et non à ce qui n'est pas. Inventé dès le VII^{e} siècle en Inde le zéro n'apparaît en Europe qu'au X^{e} siècle.

Si conceptuellement l'acceptation du zéro fut difficile, son utilisation combinée à celles des chiffres arabes pour écrire les nombres fit florès.

Il existait des systèmes décimaux depuis le III^e siècle avant Jésus-Christ mais l'écriture était lourde. Si α avait représenté le nombre 1 et β le nombre 10 voici comment les égyptiens auraient écrit 43 : $\beta\beta\beta\beta\alpha\alpha\alpha$.

Grâce à l'emploi du zéro positionnel nous avons notre système d'écriture : sans les zéros qui le suivent nous ne pourrions pas savoir que le 1 dans l'écriture 100 représente une centaine.

Le zéro positionnel permet de manipuler avec une grande aisance les fractions dont le dénominateur est une puissance de 10 ; ce que les élèves appellent « les chiffres après la virgule ».

Les nombres négatifs ne furent acceptés qu'au XVIII^e siècle. Ils furent découvert et utilisés bien avant mais leur acceptation en tant que nombre nécessitait de dépasser un grand nombre de paradoxes.

Nous avons donc, au terme de cette évolution, trois écritures des nombres : les nombres entiers, les nombres fractionnaires et les nombres avec une écriture décimale (auxquelles ont pourrait rajouter l'écriture scientifique ou l'écriture ingénieur mais ce sont des écritures qui servent essentiellement pour les valeurs approchées). À ces trois principales écritures se rajoute le signe puisque à chaque nombre positif lui correspond son opposé en négatif.

Comparer des nombres.

Puisqu'il y a différentes écriture, il y a un risque qu'un nombre puisse avoir plusieurs écritures et que nous soyons incapables de nous en rendre compte. Il faut être capable de distinguer les nombres ; en mathématique nous dirons comparer.

Comparer deux nombres a et b c'est dire laquelle des trois possibilités suivantes, qui s'excluent mutuellement, est vraie : $a = b$, $a < b$ et enfin $a > b$. Ceci revient à chercher le signe de la différence $a - b$.

Exemples.

1. $a = 3$, $b = 1000$,
2. $a = 17$ et $b = 16{,}80$.
3. $a = 34{,}07$ et $b = 34{,}7$.
4. $a = 4{,}3$ et $b = \frac{2}{10}$.
5. $a = 5$ et $b = \frac{1}{3}$.

Les écritures décimales ne sont pas forcément finies. Ainsi $\frac{1}{3}$ a une écriture décimale infinie : $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$.

Remarquons que nous ne pouvons pas utiliser les écritures décimales infinies sans un certain risque puisque : $0{,}333\cdots + 0{,}333\ldots 0{,}333\cdots = 1$. Pourtant nous serions tentés de dire que $0{,}999\cdots < 1$.

Nous voyons avec ce dernier exemple que si nous devions retenir une seule méthode générale pour comparer les nombres ce serait de faire la différence de leur écriture fractionnaire.

Les grecs de l'antiquité qui manipulaient uniquement des fractions furent néanmoins confrontés à une difficulté : $\sqrt{2}$. C'est bien un nombre puisque c'est une longueur mais ce n'est pas une fraction (ce qui sera démontré dans la leçon traitant des multiples et diviseurs).

Autrement dit tous les nombres ne peuvent pas s'écrire sous forme de fractions.

Il a fallut commencer à penser à ranger les nombres pour y voir clair et repérer ceux qui manquaient.

Le dévissage de l'ensemble des nombres (les matriochka).

Proposition 1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ mais $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$.

Démonstration. Il y a deux choses à démontrer.

* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ par construction puisque nous avons jouter des éléments à $\mathbb{N}$ pour obtenir $\mathbb{Z}$.
* Pour montrer que $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$ il suffit de montrer qu'il existe (au moins) un nombre entier relatif qui n'est pas un entier naturel. -1 n'est pas égale à 0 car sinon $1 = 0$ et n'est pas égale à un entier naturel strictement supérieur à 0 car sinon $1 + (-1)$ ne serait pas nul.

Proposition 2. Soit $p \in \mathbb{Z}$. Si p^2 est pair alors p est pair.

Démonstration. Il s'agit de la contraposée de l'affirmation : « si $p \in \mathbb{Z}$ est impair alors p^2 est impair ».

Proposition 3. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration. Démontrons en raisonnant par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel.

Il faut interpréter ceci en utilisant la définition du nombre rationnel.

Il existe donc des entiers naturels p et q avec q non nul tels que : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Montrons que p et q sont des nombres pairs.

* Donc, en multipliant par q de part et d'autre dans l'égalité : $q\sqrt{2} = p$. Nous allons nous ramener à l'arithmétique en utilisant des entiers naturels.

$$\left(q\sqrt{2}\right)^2 = p^2$$

nous en déduisons successivement :

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 q^2 = p^2$$
$$2q^2 = p^2$$

Donc p^2 est pair et, d'après le lemme p est donc pair.

* Puisque p est pair il existe k tel que $p = 2k$. Nous pouvons donc écrire :

$$2q^2 = (2k)^2$$
$$2q^2 = 4k^2$$
$$q^2 = 2k^2$$

Donc q^2 est pair et d'après le lemme q aussi est pair.

Nous avons obtenus ici une incohérence.

Si p et q sont pairs c'est qu'ils ont un diviseur commun : 2. La fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible ce qui contredit notre hypothèse.

Nous avons démontré, en raisonnant par l'absurde, que nécessairement, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Proposition 4. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ mais $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$.

Démonstration.

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. $n = \frac{n}{1}$ donc n peut s'écrire comme un rationnel et donc $n \in \mathbb{Q}$.
   Ceci étant vrai quelque soit le nombre n choisi : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
2. $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ mais $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$. En effet $0 < \frac{1}{3} < 1$.

Remarques.

1. Il est possible de reconnaître un nombre rationnel par son développement décimal infini. En effet celui-ci est nécessairement périodique (à partir d'un certain rang. Par exemples : $0{,}333\ldots$, $-12{,}343434\ldots$ et $3{,}000\ldots$ sont des nombre rationnels.

Proposition 5. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$ et $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, mais $\mathbb{D} \not\subset \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{D}$.

Proposition 6. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ mais $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q}$.

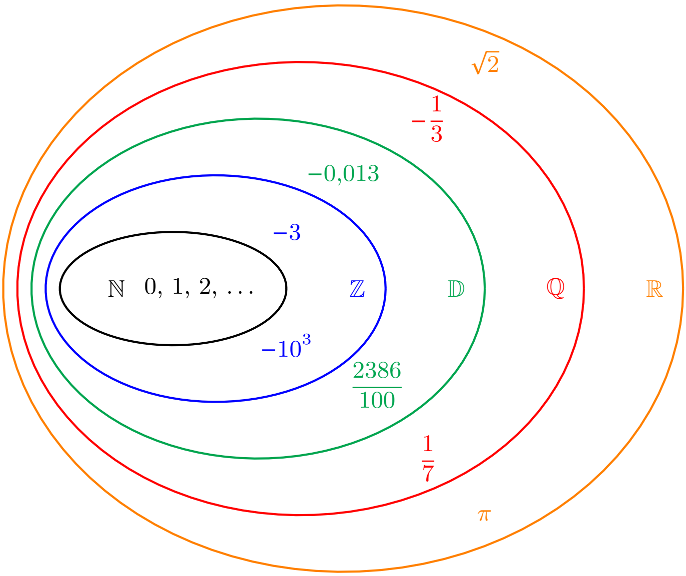
Démonstration.

1. L'inclusion découle du fait que $\mathbb{R}$ est construit à partir de $\mathbb{Q}$ en ajoutant d'autres nombre.
2. $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. L'irrationalité de $\sqrt{2}$ sera pour l'instant admise.

Remarques.

1. Les nombres qui ne sont pas réels sont appelés des *nombres irrationnels*.
2. Il est possible de reconnaître un nombre irrationnel à son développement décimal infini : celui-ci ne comporte aucune périodicité (aucune répétition jusqu'à l'infini d'une série de chiffres). Par exemple π et $\sqrt{2}$ ont des développements décimaux infinis sans aucune répétition.
   Ces pour cette raison que les nombres irrationnels ne sont jamais présenté par leur écriture décimale mais par des lettres ou des symboles. Certains sont célèbres : π (pi), φ (nombre d'or), γ (constante d'Euler), e (constante de Neper), $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ...

Nous pouvons résumer les inclusions entre les ensembles classiques étudiés avec un diagramme de Venn qui schématise la chaîne d'inclusion : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



Il existe une multitude d'ensembles de nombres classiques. On distingue notamment les nombres algébriques et transcendants.

Il existe de plus gros ensembles de nombres que $\mathbb{R}$ ainsi $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres complexes qui permet d'ajouter les solutions des équations polynomiales sans solutions dans $\mathbb{R}$ comme $x^2 + 1 = 0$.

Il existe aussi de nombreux sous-ensembles des entiers. Par exemple l'ensemble des nombres premiers que vous connaissez déjà mais aussi les nombres triangulaires, les nombres parfaits, ...

Exercices.

EXERCICE 1. Déterminez sans justification le plus petit ensemble classique auquel appartient le nombre proposé.

a) $\sqrt{17}$.

b) $-34\,509\,786$.

c) $-0{,}0223$.

d) $34{,}45218\ldots$.

e) $\dfrac{345}{100}$.

f) $\dfrac{24}{7}$.

g) $\dfrac{34}{2^3 \times 5^2}$.

h) $\dfrac{\frac{1}{3}}{14}$.

i) $3{,}234 \times 10^{45}$.

j) $\pi + 3$.

EXERCICE 2. Déterminez sans justification le plus petit ensemble classique auquel appartient le nombre proposé.

4

a) $-\dfrac{12}{3}$.

b) $-23{,}723\,723\,7\ldots$.

c) $\dfrac{76987}{10}$.

d) π.

e) $\sqrt{3}^2$.

f) $0{,}987654321 \times 10^9$.

g) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

h) $\dfrac{2}{250}$.

i) $3 + \sqrt{2}$.

j) $\dfrac{1}{5}$.