Les rationnels.

Dans cette partie nous parlons de l'ensemble des nombres rationnels mais aussi des opérations sur ces ensembles ce qui est l'occasion de rappels.

Ensembles.

Dans cette leçon nous parlerons d'ensembles. L'ensemble est un objet mathématique à part entière. Ce mot ne signifie pas ici que l'on considère simultanément plusieurs objets mais que l'on considère l'objet formé d'une collection d'objets. Nous nous contenterons de cette définition intuitive.

Définition 1. Les objets formant un ensemble E sont appelés des *éléments* de l'ensemble. Si e est un élément de E alors on note $e \in E$.

Remarques.

1. Cette dernière phrase nécessite de s'appliquer dans l'écriture manuscrite.
2. Si f n'est pas un élément de E nous noterons : $f \notin E$.
3. Nous verrons plus tard des opérations ensemblistes, $\cap$ et $\cup$, qui permettent d'effectuer des calculs avec les objets que sont les ensembles.
4. Si nous allons ici rencontrer des ensembles particuliers, une présentation possible d'un ensemble consiste à énumérer ses éléments en les écrivant entre accolades.
5. Il arrive qu'un ensemble F soit une partie d'un plus grand ensemble E (autrement dit tous les éléments de F sont aussi des éléments de E), dans ce cas on dit que F est *inclus dans* E et on note $F \subset E$.

Exemples.

1. $\{a; 1; P\}$ est un ensemble contenant 3 éléments. Si on note E cet ensemble alors : $a \in E$, $1 \in E$ et $P \in E$.
2. Une droite est un ensemble, infini de points.
3. Le segment $[AB]$ est un ensemble infini de points inclus dans l'ensemble infini de points qu'est la droite (AB) : $[AB] \subset (AB)$.

Les fractions.

Définition 2. Une *fraction* est un nombre qui peut s'écrire comme le quotient d'un entier (relatif) par un autre entier (relatif non nul). Autrement dit si $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ alors $\frac{a}{b}$ est une nombre appelé fraction.

Remarques.

1. Au lycée et ultérieurement seule la notation fractionnaire est utilisée pour la division. L'obélus ($\div$) n'étant plus utilisé que pour les quotients de fractions.
2. Lorsqu'un nombre, dans son écriture décimale, n'a que des zéros à partir d'un certain nombre de décimales alors on dit que c'est un *nombre décimal*. Ainsi : $2\,315{,}895\,643 = 2\,315{,}895\,643\,000\ldots$ est un nombre décimal.

   Tous les nombres décimaux peuvent s'écrire sous forme de fraction : $2\,315{,}895\,643 = \frac{2\,315\,895\,643}{1\,000\,000}$.

   Il ne faut pas confondre écriture décimale et nombre décimal.
   En particulier tous les entiers (relatifs) sont des nombres décimaux.

3. Il existe des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous forme de fractions : l'irrationalité de π est admise mais celle de $\sqrt{2}$ sera démontrée dans une prochaine leçon.

4. Rappelons une règle de priorité opératoire : dans une écriture fractionnaire la division correspondant à la barre de fraction est la dernière opération effectuée.
5. La manipulation des fractions nécessite de connaître les règles d'addition (réduire au même dénominateur),
$$\frac{a}{b}+\frac{x}{y}=\frac{ay+xb}{by}$$
de multiplication,
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{x}{y}=\frac{ax}{by}$$
et de division
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{x}{y}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{y}{x}.$$
Rappelons encore que pour simplifier une fraction il faut qu'il y ait un facteur commun au numérateur et au dénominateur :
$$\frac{a\cdot x}{b\cdot x}=\frac{a}{b}$$
6. Une astuce d'écriture qui nous sera souvent utile
$$\frac{a}{b}=\frac{1}{b}\cdot a$$
7. Rappelons enfin qu'il est impossible de diviser par 0.
Démonstration.
Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe un nombre q tel que $\frac{3}{0}=q$ (nous supposons que l'on peut diviser 3 par 0). Donc $3=0\times q$. Ce qui est impossible car $0\times q=0$ (0 est une valeur absorbante). Nous avons donc démontré par l'absurde qu'il est impossible de diviser 3 par 0.
8. Les règles de priorités pour l'instant se limitent à :

Priorité 1	Les calculs entre parenthèses ou crochets. S'il y a des parenthèses emboîtées les plus emboîtées sont prioritaires. La barre de fraction joue le même rôle que des parenthèses autour des numérateurs et dénominateurs.
Priorité 2	Les multiplications et division ($\div$) en allant de gauche à droite.
Priorité 3	Les additions et soustractions en allant de gauche à droite.

Les nombres rationnels.

Définition 3. L'ensemble des *nombres rationnels*, qu'on note $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'une fraction.

Remarques.
1. Un entier est un nombre rationnel. Par exemple : $-13=\frac{-13}{1}$.
2. Les nombres décimaux peuvent s'écrire comme des fractions donc ce sont des nombres rationnels. Ainsi : $0{,}1=\frac{1}{10}$.
3. Il existe des nombres qui ne sont pas décimaux et qui sont rationnels. Ainsi $\frac{1}{3}$ est un nombre rationnel mais son écriture décimale est infinie donc ce n'est un nombre décimal.

Faire une division à la main pour faire apparaître la période dans l'écriture décimale.

4. Tous les nombres ne sont pas rationnels.
5. Lorsqu'un nombre rationnel a une écriture décimale infinie on préfère son écriture fractionnaire.

   Les écritures décimale infinies ne sont pas toujours uniques : $0{,}999\cdots = 1$.

6. Un nombre rationnel admet une écriture fractionnaire canonique (unique) appelée la *forme irréductible* qui est obtenue lorsque le PGCD des numérateur et dénominateur est 1 (ils n'ont pas de facteur commun). *confer infra.*

Proposition 1.
Lorsqu'un nombre a une écriture décimale infinie périodique c'est un nombre rationnel.

Remarques :

1. Ce résultat est admis.
2. On dit que l'écriture est périodique lorsqu'une série de chiffre se reproduit indéfiniment.

Exemples.

1. $0{,}333\ldots$ est rationnel.
2. $45{,}78242424\ldots$ est rationnel.

Faire au tableau un schéma des inclusions successives avec les ensembles usuels vus jusque là.

I Forme irréductible d'une fraction.

Nombres premiers.

Un entier naturel est dit *premier* si et seulement il a exactement deux diviseurs distincts positifs.

Exemples.

1. 12 n'est pas un nombre premier puisqu'il est divisible par 2 et 3.
2. Les premiers nombres premiers sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.
3. 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur : lui-même.

Les nombres premiers jouent un rôle fondamental dans de nombreux domaines notamment en cryptographie.

Décomposition en facteurs premiers.

Théorème 1. - théorème fondamental de l'arithmétique
Tout entier naturel supérieur ou égale à 2 admet une décomposition en facteurs premiers unique à l'ordre des facteurs près.

Exemples.

1. $12 = 2 \times 2 \times 3$ et 2 et 3 sont bien des nombres premiers.
2. $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$.
3. $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$.

Remarques.

1. Pour que l'écriture de la décomposition soit unique la convention est d'écrire une seule fois chaque facteur premier à la puissance convenable et d'écrire les facteurs dans l'ordre croissant. On n'écrira pas $3 \times 2 \times 3$ mais 2×3^2.
2. D'après ce théorème tous les résultats sur les nombre entiers naturels peuvent se ramener à des résultats sur les nombres premiers.

EXERCICE 1. ♥

Déterminez la décomposition en facteurs premiers de 180.

Exercice 1.

Pour cette question nous pouvons nous contenter d'exhiber la réponse. Regardons le travail à faire au brouillon.

Nous divisons autant de fois que possible par les nombres premiers en allant du plus petit au plus grand.

Étape 1 • 180 est divisible par 2 donc :

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & \end{array}$$

Étape 2 • 90 est divisible par 2 donc :

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & \end{array}$$

Étape 3 • 45 n'est pas divisible par 2, nous essayons donc avec le nombre premier suivant 3. 45 est bien divisible par 3 puisque $4 + 5 = 9$ donc :

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & \end{array}$$

En procédant ainsi de proche en proche nous obtenons finalement

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Ainsi : $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$.
Finalement nous écrirons uniquement

$$\boxed{180 = 2^2 \times 3^2 \times 5.}$$

Forme irréductible d'une fraction.

Le nombre $\frac{1}{2}$ peut encore s'écrire $\frac{2}{4}$. L'écriture fractionnaire d'un nombre n'est pas unique. Ceci pouvant produire de la confusion les mathématiciens ont retenu une écriture fractionnaire qui est unique : *la forme irréductible d'une fraction*.

Proposition 2.

Tout nombre rationnel s'écrit de façon unique comme une fraction dont le numérateur et le dénominateur non pas d'autre commun diviseur que 1 (ou -1).

Exemples.

1. $\frac{1}{3}$ est une forme irréductible.
2. $\frac{14}{21}$ n'est pas une forme irréductible puisque 14 et 21 admettent 7 pour diviseur commun : $\frac{14}{21} = \frac{2\times 7}{3\times 7} = \frac{2}{3}$.
3. En toute rigueur la forme irréductible de l'entier 5 devrait s'écrire $\frac{5}{1}$ cependant l'usage veut que nous usions de l'écriture la plus simple : 5.

Remarques.

1. Des nombres entiers qui n'ont pas de diviseur commun autre que 1 ou -1 sont dits *premiers entre eux*.
2. Pour trouver la forme irréductible d'une fraction il faut recherche le plus grand facteur commun au numérateur et au dénominateur qu'on appelle le P.G.C.D. (plus grand commun diviseur). Le P.G.C.D. s'obtient grâce à l'algorithme d'Euclide.
3. Dans la pratique pour trouver la forme irréductible nous utiliserons des décompositions en facteurs premiers.

EXERCICE 2. ♥

Donnez la forme irréductible du nombre rationnel $\dfrac{120}{300}$.

Exercice 2.

$\frac{120}{300} = \frac{2}{5}$.

II Exercices.

EXERCICE 3. ♥

Faire à la main pour apprendre mise au même dénominateur. Puis faire deux vérifications à la calculatrice : en faisant un calcul en ligne puis un calcul avec les écritures fractionnaires.

Remarque : les calculs à la main sont désormais exigés notamment en STMG.

Évaluez les quantités suivantes en donnant le résultat sous forme de fraction irréductibles. :

1. $A = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{7}$
2. $B = \dfrac{1}{7} - \dfrac{4}{11}$
3. $C = \dfrac{-5}{3} + \dfrac{2}{7}$
4. $D = \dfrac{3}{-7} - \dfrac{-2}{3}$

Exercice 3.

Nous pouvons vérifier les résultats à la calculatrice.

1.

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{3} + \frac{2}{7}\\
A &= \frac{1 \times 7}{3 \times 7} + \frac{2 \times 3}{7 \times 3}\\
A &= \frac{7}{21} + \frac{6}{21}\\
A &= \frac{13}{21}
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{1}{7} - \frac{4}{11}\\
B &= \frac{1 \times 11}{7 \times 11} - \frac{4 \times 7}{11 \times 7}\\
B &= \frac{11}{77} - \frac{28}{77}\\
B &= -\frac{17}{77}
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{-5}{3} + \frac{2}{7}\\
C &= \frac{-5 \times 7}{3 \times 7} + \frac{2 \times 3}{7 \times 3}\\
C &= \frac{-35}{21} + \frac{6}{21}\\
C &= \frac{-29}{21}
\end{aligned}
$$

4.

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{3}{-7} - \frac{-2}{3}\\
D &= \frac{3 \times 3}{-7 \times 3} - \frac{-2 \times (-7)}{3 \times (-7)}\\
D &= \frac{9}{-27} - \frac{14}{-27}\\
D &= \frac{-5}{-27}\\
D &= \frac{5}{27}
\end{aligned}
$$

Nous dirons qu'un calcul est un quotient si la dernière opération effectuée en respectant les priorités opératoires est une division.

EXERCICE 4. ♥

Il faut savoir faire ces calculs à la calculatrice.

Évaluez les quantités suivantes en donnant le résultat sous forme d'une fraction irréductible :

1. $A = -\dfrac{-4}{7-3}$
2. $B = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{6}{7}$
3. $C = \dfrac{-2}{4} \times \left(-\dfrac{3}{-6}\right)$
4. $D = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{7}}$
5. $E = \dfrac{3}{\frac{5}{4}}$
6. $F = \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}}{\frac{1}{7}} \times \dfrac{1}{2}$

Exercice 4.

1.

$$\begin{aligned} A &= -\frac{-4}{4} \\ &= -(-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} B &= \frac{2 \times 6}{3 \times 7} \\ &= \frac{12}{21} \\ &= \frac{3 \times 2 \times 2}{3 \times 7} \\ &= \frac{4}{7} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} C &= \frac{-2}{4} \times \frac{-3}{-6} \\ &= \frac{-2 \times (-3)}{4 \times (-6)} \\ &= \frac{6}{-24} \\ &= -\frac{6}{24} \\ &= -\frac{6 \times 1}{6 \times 2 \times 2} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} D &= \frac{4}{5} \times \frac{7}{6} \\ &= \frac{4 \times 7}{5 \times 6} \\ &= \frac{28}{30} \\ &= \frac{2 \times 2 \times 7}{2 \times 3 \times 5} \\ &= \frac{14}{15} \end{aligned}$$

5.

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{\frac{3}{1}}{\frac{5}{4}} \\
&= \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{5} \\
&= \frac{3 \times 2 \times 2}{5} \\
&= \frac{12}{5}
\end{aligned}
$$

6.

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{\frac{1\times3}{2\times5}}{\frac{1}{7}} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{7}} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{10} \times \frac{7}{1} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{3 \times 7 \times 1}{10 \times 1 \times 2} \\
&= \frac{3 \times 7}{2 \times 2 \times 5} \\
&= \frac{21}{20}
\end{aligned}
$$

EXERCICE 5.

Calculez et donnez le résultat sous forme de fraction irréductible.

1. $A = \frac{-3}{2} + \frac{1}{5}$.
2. $B = \frac{2}{6} \times \frac{3}{7}$.
3. $C = \frac{35}{49} + \frac{56}{37}$.
4. $D = \frac{256}{47} \times \frac{245}{650}$.
5. $E = \frac{\frac{4}{6} + \frac{17}{3}}{56} + \frac{9}{13}$.

III Ce qu'il faut retenir.

1. Vocabulaire et notation : fraction, nombre décimal, écriture décimale, nombre rationnel, ensemble des nombres rationnels, $\mathbb{Q}$.
2. Additionner des fractions : mise au même dénominateur.
3. Multiplication et division de fractions.
4. Savoir faire ces calculs avec la calculatrice.
5. Pour les élèves souhaitant s'orienter vers les classes scientifiques les techniques calculatoires doivent être connues.