Les entiers.

Dans cette partie nous parlons des ensembles d'entiers mais aussi des opérations sur ces ensembles ce qui est l'occasion de rappels.

Ensembles.

Dans cette leçon nous parlerons d'ensembles. L'ensemble est un objet mathématique à part entière. Ce mot ne signifie pas ici que l'on considère simultanément plusieurs objets mais que l'on considère l'objet formé d'une collection d'objets. Nous nous contenterons de cette définition intuitive.

Définition 1. Les objets formant un ensemble E sont appelés des *éléments* de l'ensemble. Si e est un élément de E alors on note $e \in E$.

Remarques.

1. Remarquons que cette dernière phrase nécessite de s'appliquer dans l'écriture manuscrite.
2. Si f n'est pas un élément de E nous noterons : $f \notin E$.
3. Nous verrons plus tard des opérations ensemblistes, $\cap$ et $\cup$, qui permettent d'effectuer des calculs avec les objets que sont les ensembles.
4. Si nous allons ici rencontrer des ensembles particuliers, une présentation possible d'un ensemble consiste à énumérer ses éléments écrits ente accolades.

Exemples.

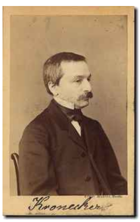
1. $\{a; 1; P\}$ est un ensemble contenant 3 éléments. Si on note E cet ensemble alors : $a \in E$, $1 \in E$ et $P \in E$.
2. Une droite est un ensemble, infini de points.

Entiers naturels : $\mathbb{N}$.

Définition 2. Les *entiers naturels* sont les nombres qui servent à dénombrer, à compter. L'ensemble de tous les entiers naturels est : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Remarques.

1. $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément, on dit *un minimum*, qui est 0.
2.



Leopold Kronecker ($XIX^{\text{ième}}$) : « Dieu a fait les nombres entiers, tout le reste est l'œuvre de l'homme. »

3. La notation $\mathbb{N}$ représente la première lettre de « naturel ».
4. En fait l'ensemble des nombres entiers naturels se construit logiquement.
5. Les entiers naturels sont donc des nombres positifs (ce qui signifie éventuellement 0). En anticipant sur les diverses écritures de nombres déjà rencontrées par les élèves nous pouvons dire que les entiers naturels sont des nombres positifs : dont une écriture décimale comporte une partie décimale nulle (écriture décimale) ou dont une écriture fractionnaire comporte 1 au dénominateur.

6. Parmi les mathématiciens qui ont marqué l'étude de l'ensemble des entiers naturels :

Giuseppe Peano.

Hermann Günther Grassmann.

7. L'écriture manuelle du $\mathbb{N}$ diffère un peu : AJOUTR photo

Exemples.

1. 4 est un entier naturel, ce que nous noterons : $4 \in \mathbb{N}$.
2. -1, $0{,}1$, $\frac{1}{3}$, $\sqrt{2}$ ne sont pas des nombres entiers naturels. Encore un conte-exemple : $\pi \notin \mathbb{N}$. Ainsi $\mathbb{N}$ ne contient pas tous les nombres il en manque énormément.

EXERCICE 1. Démontrez que $\frac{1}{7}$ n'est pas un entier naturel.
EXERCICE 2. Démontrez que $0{,}3$ n'est pas un entier naturel.

Définition 3. L'ensemble des entiers naturels est muni de deux opérations : l'*addition* notée $+$ et la *multiplication* notée $\times$. Le résultat d'une addition est appelé une *somme* et celui d'une multiplication un *produit*.

Remarques.

1. 0 est appelé le *neutre pour l'addition* car : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n + 0 = 0 + n = n$.
2. 0 est appelé le *neutre pour la multiplication* car : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n \times 1 = 1 \times n = n$.
3. L'addition et la multiplication sont connues depuis les plus petites classes : tables pythagoriciennes des deux opérations pour les entiers naturels de 0 à 10. Rappelons qu'il est difficile de faire des mathématiques sans une bonne maîtrise de ces compétences élémentaires.
4. La soustraction et la division sont d'autres opérations bien connues pour modéliser respectivement un retrait et un partage équitable. Nous n'en parlons pas pour l'instant mais nous les introduirons ultérieurement d'une autre façon.
5. On dit que le zéro est absorbant : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n \times 0 = 0 \times n = 0$.
6. L'addition et la multiplication, contrairement à la division et à la soustraction, sont commutatives : $n + m = m + n$ et $n \times m = m \times n$.
7. Les addition et multiplications sont des opérations internes à $\mathbb{N}$: une somme ou un produit d'entiers naturels est encore un entier naturel.

Entiers relatifs : $\mathbb{Z}$.

En essayant de résoudre l'équation $1 + x = 0$ d'inconnue x nous voyons que les entiers naturels sont insuffisants pour résoudre certains problèmes. On créa donc (une tâche qui fut fort longue) de nouveaux nombres dits négatifs.

Définition 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle *opposé* de n, et on note $-n$, le nombre tel que $n + (-n) = 0$.

Remarques.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$, par habitude historique et pour simplifier l'écriture des calculs, plutôt que d'écrire $n + (-m)$, nous écrirons $n - m$. Ainsi le résultat d'une soustraction, appelé traditionnellement *différence*, pourra aussi être nommé somme.
2. De $0 + (-0) = 0$ nous déduisons que $0 = -0$. 0 est son propre opposé. Nous retiendrons que 0 est à la fois positif et négatif.

3. Si vous avez pu écrire $+3$ pour désigner le nombre 3 lors de la découverte des nombres relatifs c'est une écriture qui n'a pas d'autre intérêt que pédagogique. Nous n'écrirons jamais $+(+3)$ ou $-(+3)$.

Proposition 1. Quel que soit $n \in \mathbb{Z}$, $-(-n) = n$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. $-n + n = n + (-n) = 0$ donc n est l'opposé de $-n$. Autrement dit $-(-n) = n$.

Remarques.

1. Ainsi le passage à l'opposé est une involution : l'opposé de l'opposé d'un nombre c'est ce nombre.
2. Ce résultat est intéressant pour simplifier les écritures et explique pourquoi vous ne verrez quasiment jamais écrit $-(-3)$. Si cela se produisait vous devriez simplifier.

Définition 5. Les *entiers (relatifs)* sont les entiers naturels et leurs opposés. L'ensemble de tous les entiers est : $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

EXERCICE 3. L'affirmation : » Tous les nombres sont des entiers » est-elle vraie ou fausse ?

Remarques.

1. Une *écriture décimale infinie* d'un entier ne comporte que des zéros dans la partie décimale. Ainsi : $3 = 3{,}000\dots$
2. On retrouve que les entiers sont des nombres admettant une écriture fractionnaire dont le dénominateur est 1.
3. Il existe des nombres qui ne sont pas des entiers. Par exemple $\frac{1}{2}$ n'est pas un entier.
4. La notation $\mathbb{Z}$ (de l'allemand « zahlen » signifiant nombres) fut popularisée par Nicolas Bourbaki.

Des sous-ensembles de l'ensemble des entiers.

Définition 6. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \leqslant b$. On note $[\![a{,}b]\!]$ l'ensemble des entiers allant de a à b.

Exemples.

1. $[\![-2{,}1]\!] = \{-2; -1; 0; 1\}$.

Remarques.

1. On peut présenter un ensemble en disant le type d'objets qu'il contient puis la propriété commune vérifiée par tous les objets qu'il contient (le tout étant entre accolade) : $[\![a{,}b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant n \leqslant b\}$.
2. De même on peut décrire nombre d'objets géométriques comme des lieux de points : dans le plan euclidien, la médiatrice de $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants de A et de B.
3. C'est une notation apparue en probabilité et qui se retrouve dorénavant dans diverses branches.

Additionner des entiers relatifs.

Nous admettrons sans plus nous étendre la notion d'ordre sur l'ensemble des entiers. Notamment :

— les nombres positifs sont les nombres supérieurs (ou égaux) à 0.
— les nombres strictement positifs sont les nombres strictement supérieurs à 0.
— les nombres négatifs sont les nombres inférieurs (ou égaux) à 0.
— les nombres strictement négatifs sont les nombres strictement inférieurs à 0.

Ce lien qui peut sembler anodin entre signes et inégalités ($n \geqslant 0$ par exemple) porte de nombreux fruits.

On peut distinguer diverses situations (somme de nombres négatifs, somme d'un nombre négatif et d'un nombre positif, soustraction de deux nombres négatifs ou positifs) essayons de réduire toutes ces situations à quelques cas.

Définition 7. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On appelle *valeur absolue* de n l'entier, positif, noté $|n|$ qui est égale à n si n est positif et son opposé sinon.

Exemples.

1. Reprenons la définition pour $|-3|$. Donc dans ce cas $n = -3$ or n n'est pas positif donc $|-3|$ égale l'opposé de -3 : $|-3| = 3$.
2. De même on comprend vite que $|-10| = 10$, $|4| = 4$, $|0| = 0$, ...

Proposition 2. Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$. $-a + (-b) = -(a + b)$. Si $a \leqslant b$, alors $a + (-b) = -(b - a)$. Si $a \geqslant b$, alors $a + (-b) = a - b$.

Remarques.

1. La proposition ne parle pas du cas de la somme de deux entiers naturels qui est déjà connu. La proposition explique dans l'ordre, comment additionner deux nombres négatifs, puis un nombre positif et un nombre négatifs en distinguant selon que l'un ou l'autre a une plus grande valeur absolue.
2. *dague* Dorénavant il ne faut plus voir de soustraction mais l'addition d'un opposé : $a - b = a + (-b)$. Cette façon de voir est fondamentale pour les manipulations algébriques. Elle permet notamment la commutativité : $a + (-b) = -b + a$ et donc des simplifications.
3. Les méthodes souvent rencontrées au collège associant les additions de nombres relatifs à des translations sur la droite numérique restent pertinentes : $+2$ signifie se déplacer vers la droite de deux unités tandis que -3 signifie se déplacer vers la gauche de trois.
4. Une addition de deux nombres relatifs est du signe de celui qui a la plus grande valeur absolue.

Exemples.

1. $-2 + (-6) = -(2 + 6) = -8$.
2. $-7 - 28 = -7 + (-28) = -(7 + 28) = -35$.
3. Comme $2 \leqslant 5$, $2 + (-5) = -(5 - 2) = -3$.
4. $4 - 13 = 4 + (-13)$. Comme $4 \leqslant 13$, $4 + (-13) = -(13 - 4)$.
5. $16 + (-5) = 16 - 5 = 11$.
6. $-5 + 8 = 8 + (-5) = 8 - 5 = 3$.

EXERCICE 4. Évaluez les sommes suivantes :

a) $13 - 5$.	b) $-13 + (-11)$.	c) $17 + (-6)$.	d) $28 + (-35)$.	e) $-12 + 24$
f) $-11 + 2$.	g) $-3 + 2$.	h) $-8 - 7$.	i) $-(-3) + 4$.	j) $14 - 25$.
k) $-4 + 12$.	l) $-4 + (-11)$.	m) $13 - 5$.	n) $-37 + (-24)$.	o) $39 + (-12)$.
p) $34 + (-47)$.	q) $-39 + 102$	r) $-77 + 23$.	s) $-19 + 5$.	t) $-26 - 67$.
u) $-(-45) + 54$.	v) $12 - 36$.	w) $-8 + 23$.	x) $-8 + (-234)$.	

Exercice 4.

a) $13 - 5 = 8$.
b) $-13 + (-11) = -(13 + 11) = -24$.
c) $17 + (-6) = 17 - 6 = 11$.
d) $28 + (-35) = -(35 - 28)$.
e) $-12 + 24 = 24 - 12 = 12$
f) $-11 + 2 = 2 + (-11) = -(11 - 2) = -9$.
g) $-3 + 2 = 2 + (-3) = -(3 - 1) = -1$.
h) $-8 - 7 = -(8 + 7) = -15$.
i) $-(-3) + 4 = 3 + 4 = 7$.
j) $14 - 25 = 14 + (-25) = -(25 - 14)$.
k) $-4 + 12 = 12 - 4 = 8$.
l) $-4 + (-11) = -(4 + 11) = -15$.
m)

Signe d'un produit.

Proposition 3. Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$. $(-a) \times b = -(a \times b) = -a \times b$, $a \times (-b) = -(a \times b)$ et $-a \times (-b) = a \times b$.

Remarques.

1. Le produit de deux nombres de même signe est positif.
   Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.
2. Il est également possible de se représenter les choses comme suit.

Multiplier par un nombre négatif change le signe

$$\boxed{x} \xrightarrow{\quad -2\times \quad} \boxed{-2\times x} \qquad \boxed{x} \xrightarrow{\quad 3\times \quad} \boxed{3\times x}$$

Multiplier par un nombre positif ne change pas le signe

Exemples.

1. $-2 \times (-7) = 14$.
2. $3 \times (-5) = -(3 \times 15) = -15$

EXERCICE 5. Évaluer les produits suivants

a) $5 \times (-7)$. b) -8×3. c) $(-9) \times (-4)$. d) $-(-5) \times 8$. e) -8×9.
f) $-5 \times (-11)$. g) $(-6) \times (-8)$. h) -3×14. i) $4 \times (-11)$. j) $-6 \times (-7)$.

Priorités opératoires.

Les règles de priorités, pour l'instant, se limitent à :

Priorité 1 Les calculs entre parenthèses ou crochets. S'il y a des parenthèses emboîtées les plus emboîtées sont prioritaires.
Priorité 2 Les multiplications en allant de gauche à droite.
Priorité 3 Les additions et soustractions en allant de gauche à droite.

EXERCICE 6. Évaluez les quantités suivantes :

a) $A = 4 \times (-1)$. b) $B = -1 \times (-1)$.
c) $C = 3 \times [-2(3-5)]$. d) $D = (3 - 5 \times (-2))(-1 + (-4) \times 2)$.

Exercice 6.

a) $A = -4$ b) $B = 1$ c) $C = 12$ d) $D = -117$

Nommer le résultat d'un calcul.

Nous avons dit un peu plus haut qu'un calcul est une somme (respectivement une différence, respectivement un produit) si la dernière opération effectuée en respectant les priorités opératoires est une addition (respectivement une soustraction, respectivement une multiplication).

À moins de devoir distinguer somme et différence, les résultats d'une addition et d'une soustraction seront très souvent indifféremment appelés des sommes.

Exemples.

1. $(-3+5)\times 8 = 2\times 8 = 16$. La dernière opération effectuée est un produit donc $(-3+5)\times 8$ est un produit.
2. $3\times(2+1)-3 = 3\times 3-3 = 9-3 = 6$. La dernière opération effectuée est une soustraction donc $3 \times (2+1) - 3$ est une somme (les différences seront le plus souvent confondues avec les sommes).

3. $2\times(-2)+4\times(3-1)$ et $3-(4-2)\times(5-2)$ sont des sommes.
4. $(3-1)\times(-6-1)$ est un produit.

EXERCICE 7. Indiquez si les calculs suivants sont des sommes ou des produits et effectuez les calculs à la main.

a) $A = 5+2-5\times 3$. b) $B = (3+2)\times 5$. c) $C = (3+2)+(2-5)(3+1)$.
d) $D = (2+5)(1-3)$.

Exercice 7.

a) Calculons A.

$$\begin{aligned} A &= 5+2-5\times 3 \\ &= 5+2-15 \\ &= 7-15 \\ &= -8 \end{aligned}$$

Il s'agit d'une somme.

b) Calculons B.

$$\begin{aligned} B &= (3+2)\times 5 \\ &= 5\times 5 \\ &= 25 \end{aligned}$$

Il s'agit d'un produit.

c) Calculons C.

$$\begin{aligned} C &= (3+2)+(2-5)(3+1) \\ &= 5+(-3)\times 4 \\ &= 5+(-12) \\ &= -7 \end{aligned}$$

Il s'agit d'une somme.

d) Calculons D.

$$\begin{aligned} D &= (2+5)(1-3) \\ &= 7\times(-2) \end{aligned}$$

Il s'agit d'un produit.

Exercices.

EXERCICE 8. Sans calculatrice, évaluez les quantités suivantes en détaillant si besoin est puis précisez la nature du calcul (somme ou produit).

a) $A = 4\times(-7)$. b) $B = -3\times(-4)$. c) $C = 2\times[-3(5-7)]$.
d) $D = -13+(-5)$. e) $E = -12-7$.

EXERCICE 9. Calculez en ligne en détaillant puis déduisez-en la nature du calcul (somme ou produit).

a) $A = -2\times(-4+2)-[3-2\times(5-3)]$. b) $B = -3\times 2-4+3-7+8$.
c) $C = [(-5+7)+6]-5$. d) $D = [(3-2)\times(4-1)](5-7)$.
e) $E = -3\times(-2)\times(-1)\times 4$. f) $F = -4\times(2-5)\times(3+1)$.

Exercice 9.

a)

$$\begin{aligned} A &= -2\times(-2)-[3-2\times 2] \\ &= 4-[3-4] \\ &= 4-[-1] \\ &= 5 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} B &= -6-4-3-7+8 \\ &= -12 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} C &= [2+6]-5 \\ &= 8-5 \\ &= 3 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} D &= [1\times 3]\times(-2) \\ &= 3\times(-2) \\ &= -6 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} E &= 6\times(-1)\times 4 \\ &= -6\times 4 \\ &= -24 \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} F &= -4\times(-3)\times 4 \\ &= 12\times 4 \\ &= 48 \end{aligned}$$

EXERCICE 10. Recopiez et complétez les phrases

a) L'ensemble $\{0;1;2;\dots\}$ est appelé l'ensemble .... et est noté ....
b) L'ensemble $\{\dots;-2;-1;0;1;2;\dots\}$ est appelé l'ensemble .... et est noté ....

EXERCICE 11. Recopiez en complétant par $\in$ ou $\notin$.

a) $2{,}1\dots\mathbb{Z}$. b) $10^3\dots\mathbb{Z}$. c) $-4\dots\mathbb{Z}$. d) $-17\dots\mathbb{N}$.
e) $\frac{1}{3}\dots\mathbb{Z}$. f) $\frac{12}{3}\dots\mathbb{N}$. g) $3-4\dots\mathbb{N}$. h) $0\dots\mathbb{Z}$.

EXERCICE 12. Dites s'il s'agit d'une somme, ou d'un produit puis calculez en ligne en détaillant l'expression $F=-3\times(2-1)-[2-2\times(4-2)]$.

Ce qu'il faut retenir.

1. Vocabulaire et notation : ensemble, notation des ensembles avec accolades, élément, $\in$, $\notin$, entiers naturels, $\mathbb{N}$, entiers relatifs, $\mathbb{Z}$, neutre, opposé, absorbant, $[\![a,b]\!]$.
2. Les méthodes : sommer des nombres relatifs, multiplier des nombres relatifs, identifier des sommes ou des produits, respecter les priorités opératoires.