

Évolutions.

Un commerçant vous offre une réduction de 300 euros. Est-ce intéressant ?

La réponse dépend de la valeur de ce qui est vendu. Pour un appartement c'est peu mais pour un téléphone c'est très intéressant.

Le montant de la réduction doit être comparé par rapport à le prix initial. Qui dit rapport dit proportionnalité, dit division.

Taux d'évolution.

Les variations d'une valeur, de V_D (valeur de Départ) jusqu'à V_A (valeur d'Arrivée), peuvent se calculer soit avec la **variation absolue** $V_A - V_D$ soit avec la **variation relative** $t = \frac{V_A - V_D}{V_D}$.

Définition 1. Lorsque la variation relative est exprimée en pourcentage nous parlerons de **taux d'évolution** (ou taux de croissance ou encore pourcentage d'évolution) $\frac{V_A - V_D}{V_D} \times 100$.

Remarques.

1. La variation absolue est dans la même unité que la valeur. La variation relative n'a pas d'unité : on la donne souvent en écriture décimale ou sous forme de pourcentage (taux).
2. Le taux d'évolution égale $100t$. Concrètement, nous calculerons la variation relative puis déplacerons la virgule pour obtenir le taux.
3. Le taux d'évolution (comme la variation absolue) est négatif s'il s'agit d'une baisse, et positif s'il s'agit d'une hausse.
4. Les économistes distinguent parfois le taux de diminution et le taux d'augmentation. Ces deux taux sont alors positifs. Ce sont eux qu'on retrouve dans le langage courant : on parle de « baisse de 10 % » et non d'un taux d'évolution de -10% . En mathématique nous nous sommes réconciliés avec les nombres négatifs depuis quelques siècles.
5. Dans les situation que nous rencontrerons la variation relative se donne avec 4 décimales et le taux avec 2 décimales sauf indications contraires dans les exercices.

EXERCICE 1. Le montant de la redevance audiovisuel en France métropolitaine était de 114,49 euros en 2001 et de 123 euros en 2011. Calculez la variation absolue et le taux d'évolution de cette taxe de 2001 à 2011.

Exercice 1. Calculons la variation absolue $V(2001,2011)$.

$$\begin{aligned} V(2001,2011) &= V_A - V_D \\ &= 123 - 114,49 \\ &= 8,51 \end{aligned}$$

La redevance a augmenté de 8,51 €.

Calculons la variation relative $t_{1 \rightarrow 11}$.

$$\begin{aligned} t_{1 \rightarrow 11} &= \frac{V_A - V_D}{V_D} \\ &= \frac{123 - 114,49}{114,49} \\ &\approx 0,07432 \end{aligned}$$

La redevance a augmenté de 7,43 %.



EXERCICE 2. Lors de soldes un commerçant baisse le prix d'un article de 90 à 60 euros. Quel est le taux d'évolution appliqué à cet article.

Exercice 2. Calculons la variation relative t .

$$\begin{aligned} t &= \frac{V_A - V_D}{V_D} \\ &= \frac{60 - 90}{90} \\ &\approx -0,33333 \end{aligned}$$

Le prix a baissé de 33,33 %.

Remarque. La phrase de conclusion pour un calcul de taux d'évolution s'exprime avec un taux d'augmentation ou un taux de diminution et est donc toujours un nombre positif.

EXERCICE 3. Calculez la variation absolue et le taux d'évolution du nombre d'élève choisissant l'option mathématique en terminale ES entre 2014 et 2017 d'après le tableau suivant :

Année	2013	2014	2015	2016	2017
Nombre d'élèves	27	29	24	33	21

Exercice 3.

*

$$\begin{aligned} V_A - V_D &= 21 - 29 \\ &= -8 \end{aligned}$$

Entre 2014 et 2017 le nombre d'élèves a diminué de 6.

*

$$\begin{aligned} t_g &= \frac{V_A - V_D}{V_D} \\ &= \frac{21 - 29}{29} \\ &\approx -0,275862 \end{aligned}$$

Le nombre d'élève a diminué de 27,59 %.

Coefficient multiplicateur.

« Un employeur annonce que les salaires seront augmentés de 5 %. Quel sera le nouveau salaire d'un employé qui touchait 1 600 €. »

- Le montant de l'augmentation correspond à 5 % du salaire initial : $\frac{5}{100} \times 1\,600 = 80$ €.
- Donc le nouveau salaire est $1\,600 + 80 = 1\,680$ €.

Nous allons préférer un autre raisonnement, utilisant le coefficient multiplicateur, pour répondre à cette question. Le nouvel outil qui est utilisé, le coefficient multiplicateur, devient indispensable pour les raisonnements complexes (taux d'évolutions successifs vus plus loin), ou pour créer des algorithmes.

Définition 2. Le *coefficient multiplicateur* est le nombre par lequel il faut multiplier la valeur de départ pour obtenir la valeur d'arrivée : $V_D \times CM = V_A$.

EXERCICE 4. Si l'année dernière vos vacances vous avaient coûté 1200 € et que leur coût a doublé cette année, combien allez-vous dépenser cette année? Quel est le coefficient multiplicateur correspondant à cette évolution?

Proposition 1. Pour calculer le coefficient multiplicateur nous pourrions utiliser l'une des formules suivantes : $CM = \frac{V_A}{V_D}$ ou $CM = 1 + t$.

Remarques.

1. La première formule montre que le coefficient multiplicateur est un nombre sans unité (comme les taux d'évolution qu'il va remplacer).
2. Dans la formule, t est exprimé en pourcentage et peut être positif ou négatif.
3. CM est inférieur à 1 s'il s'agit d'une diminution et supérieur à 1 s'il s'agit d'une hausse.
4. Nous mélangerons parfois la seconde formule et la définition en écrivant $V_D \times (1 + t) = V_A$.

EXERCICE 5. Dans la pièce *Le Cid* de Corneille, nous pouvons lire ces vers : « Nous partîmes cinq cents, mais par un prompt renfort, Nous nous vîmes trois milles en arrivant au port. » Calculez le coefficient multiplicateur correspondant à cette évolution.

Exercice 5. Calculons le coefficient multiplicateur CM .

Nous connaissons les valeurs de départ et d'arrivée nous utiliserons donc la première formule de la proposition.

Par définition

$$\begin{aligned} CM &= \frac{V_A}{V_D} \\ &= \frac{3000}{500} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Le coefficient multiplicateur correspondant à cette évolution est : $CM = 6$.

EXERCICE 6. Le P.I.B. (produit intérieur brut) d'un pays est passé de 196 milliards de dollars à 204. Calculez le coefficient multiplicateur correspondant à cette évolution. Vous arrondirez le résultat à 10^{-4} près par excès.

EXERCICE 7. Calculez les coefficients multiplicateurs correspondant à :

- | | | |
|---|-------------------------|-------------------------|
| a) une hausse de 20 %, | b) une baisse de 20 %, | c) une hausse de 34 %, |
| d) une hausse de 5 %, une baisse de 50 %, | e) une hausse de 100 %, | f) une hausse de 200 %. |

Exercice 7. Il s'agit, à partir du taux d'évolution de retrouver le coefficient multiplicateur, nous utiliserons donc la seconde formule de la proposition.

- a) Calculons le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 20 %.
D'après le cours

$$\begin{aligned}CM &= 1 + t \\&= 1 + \frac{20}{100} \\&= 1,20\end{aligned}$$

$$CM = 1,2.$$

Calculons le coefficient multiplicateur correspondant à une baisse de 20 %.
D'après le cours

$$CM = 1 + t$$

Comme il s'agit d'une baisse le taux d'évolution est négatif :

$$= 1 + \frac{-20}{100}$$

$$CM = 0,8.$$

EXERCICE 8. Si un salaire de 1 800 € augmente de 5 % quel est alors le nouveau salaire ?
Exercice 8. Déterminons le nouveau salaire V_A .

Le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 5 % est

$$\begin{aligned}CM &= 1 + t \\&= 1 + \frac{5}{100} \\&= 1,05\end{aligned}$$

Donc le nouveau salaire est

$$\begin{aligned}V_A &= V_D \times CM \\&= 1\,600 \times 1,05 \\&= 1\,680\end{aligned}$$

Le nouveau salaire est de 180 €.

EXERCICE 9. Le chiffre d'affaires du marché de l'e-commerce (ventes par internet) en France s'élevait à 4,4 milliards d'euros début 2008 et a enregistré une croissance de 27,3 % au cours de l'année. Calculez le chiffre d'affaires de l'e-commerce, au dixième de milliard d'euro près, au début de l'année 2009.

Exercice 9.

$$\begin{aligned}V_A &= 1,273 \times 4,4 \\&= 5,6012 \qquad \qquad \qquad \approx 5,6\end{aligned}$$

EXERCICE 10. Le chiffre d'affaires du groupe Carrefour en 2016 s'élevait à 85,59 milliards d'euros et a enregistré une croissance de 3 % au cours de l'année 2017. Calculez le chiffre d'affaires de Carrefour en 2017, au centième de milliard d'euro près.

Exercice 10.

$$\begin{aligned}V_A &= 1,03 \times 85,59 \\&= 88,1577 \\&\approx 88,16\end{aligned}$$

Proposition 2. Pour retrouver le taux d'évolution (en pourcentage) à partir du coefficient multiplicateur nous utiliserons : $t = CM - 1$.

Remarques.

1. Les formules sympathiques pour calculer des évolutions utilisent toutes les coefficients multiplicateurs. Or les évolutions en économie comme dans la vie courante s'expriment avec des taux d'évolutions nous serons donc sans arrêt obligés de passer de l'un à l'autre. Les données de l'énoncé en taux sont traduites en coefficients multiplicateurs puis on effectue les calculs ; s'il faut un taux nous sommes obligés de traduire les coefficients multiplicateurs en taux.

EXERCICE 11. À la suite d'une surproduction, le prix de vente d'un légume a été divisé par 3. Calculez le taux d'évolution du prix du légume.

Exercice 11. Calculons le taux d'évolution.

A priori il faut essayé d'utiliser la formule $\frac{V_A - V_D}{V_D} \times 100$. Nous ne pouvons utiliser la formule car nous ne connaissons ni V_D ni V_A .

D'après le cours

$$t = CM - 1$$

Diviser par 3 c'est multiplier par $\frac{1}{3}$ donc

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{3} - 1 \\ &\approx -0,66666 \end{aligned}$$

Le prix de vente a baissé de 66,67 %.

EXERCICE 12. Sachant que la valorisation de mon portefeuille d'actions entre le mois de juillet et le mois d'août a été multipliée par 0,975, déterminez le taux d'évolution de mes biens mobiliers entre le mois d'août et le mois de juillet.

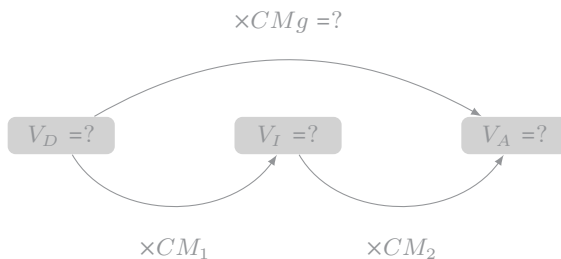
Évolutions successives.

EXERCICE 13. Cherchez l'erreur. Vidéo 1., Vidéo 2.

On considère une grandeur V (chiffre d'affaires, nombre de clients, valeur en euros, ...) qui varie en prenant trois valeurs différentes :

- V_D la valeur de départ,
- V_I la valeur intermédiaire,
- V_A la valeur d'arrivée.

Les valeurs V_D , V_I et V_A sont inconnues, seuls les taux d'évolutions (et donc les coefficients multiplicateurs) entre ces valeurs sont connus. Nous souhaitons trouver le *taux d'évolution global* entre V_D et V_A .



Proposition 3. Le coefficient multiplicateur de l'évolution global est le produit des coefficients multiplicateurs intermédiaires : $CM_g = CM_1 \times CM_2$.

Remarques.

1. Il est possible de combiner cette formule et celle liant coefficient multiplicateur et taux d'évolution $1 + t_g = (1 + t_1) \times (1 + t_2)$.
2. Il n'y a pas de formule simple avec les taux d'évolution.
3. Le résultat concernant les coefficients multiplicateurs se généralise à plus que deux évolutions.

EXERCICE 14. Un article augmente de 10% puis baisse de 20%. Quel est le taux d'évolution global de cet article en pourcentage ?

Exercice 14. Calculons le taux d'évolution global.

Déterminons les coefficients multiplicateurs intermédiaires.

Première évolution hausse de 10%.

Coefficient multiplicateur :

$$\begin{aligned} CM_1 &= 1 + t \\ &= 1 + \frac{10}{100} \\ &= 1,10 \end{aligned}$$

Seconde évolution baisse de 20%.

Coefficient multiplicateur :

$$CM_2 = 1 + \frac{-20}{100} = 0,80$$

Déterminons le coefficient multiplicateur global grâce à la précédente proposition.

Donc le coefficient multiplicateur global des deux évolutions est :

$$\begin{aligned} CM_g &= CM_1 \times CM_2 \\ &= 1,10 \times 0,8 \\ &= 0,88 \end{aligned}$$

Traduisons ce coefficient multiplicateur en taux.

Donc le taux d'évolution global est :

$$\begin{aligned} t_g &= CM_g - 1 \\ &= 100 \times (0,88 - 1) \\ &= -12 \end{aligned}$$

L'évolution globale est une baisse de 12 %.

EXERCICE 15. Le contrat de travail d'un employé prévoit une augmentation salariale annuelle de 2,5% pendant dix ans. Quel est le taux d'évolution du salaire en dix ans ?

Exercice 15.

$$\begin{aligned} CM_g &= CM_a^{10} \\ &= 1,025^{10} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} t_g &= CM_g - 1 \\ &\approx 28,01 \end{aligned}$$

EXERCICE 16. En France, en 2010, le montant de la T.V.A. sur les biens manufacturés est égale à 19,6 % du prix hors taxes.

1. Est-il plus avantageux pour l'acheteur que le vendeur lui propose une réduction de 15 % sur le prix H.T. ou sur le prix T.T.C. ?
2. Un véhicule coûte 34 698 € H.T. Le vendeur propose à un client 8 % de remise sur le prix T.T.C. Quel est le prix payé par ce client ?

Exercice 16.

1.

$$\begin{aligned} CM_g &= CM_1 \times CM_2 \\ &= 1,196 \times 0,85 \end{aligned}$$

Mais du fait de la commutativité du produit nous avons aussi $CM_g = CM_2 \times CM_1$.

2.

$$\begin{aligned} V_A &= V_D \times CM_g \\ &= 34698 \times 1,196 \times 0,92 \\ &= 38178,90336 \end{aligned}$$

Évolution réciproque.

Proposition 4. Pour retrouver la valeur de départ lors d'une évolution nous utiliserons : $V_D = \frac{V_A}{CM}$.
Remarques.

1. Autrement dit $V_D = \frac{1}{CM} \times V_A$. On dit alors que $\frac{1}{CM}$ est le *coefficient multiplicateur réciproque*.
2. Cette formule se retrouve facilement à partir de la définition du coefficient multiplicateur. Retenons surtout que pour retrouver la valeur de départ il faut passer par les coefficients multiplicateurs.

EXERCICE 17. Un ordinateur est proposé en promotion à 600 euros après avoir baissé de 12 %. Quel était son prix avant la promotion ?

Exercice 17. Retrouvons la valeur de départ V_D .

Il y a eu une baisse de 12 % et donc un coefficient multiplicateur qui fut appliqué été de

$$\begin{aligned} CM &= 1 + t \\ &= 1 + \frac{-12}{100} \\ &= 0,88 \end{aligned}$$

Donc la valeur de départ était

$$\begin{aligned} V_D &= \frac{1}{CM} \times V_A \\ &= \frac{1}{0,88} \times 600 \\ &\approx 681,81 \end{aligned}$$

Le prix initial de l'ordinateur était de 681,81 €.

EXERCICE 18. Un article augmente de 20 %. Quel taux dois-je lui appliquer pour qu'il retrouve sa valeur initiale ?

Exercice 18. Calculons le taux réciproque.

Il y a eu une augmentation de 20 % ce qui correspond au coefficient multiplicateur :

$$\begin{aligned} CM &= 1 + t \\ &= 1 + \frac{20}{100} \\ &= 1,20 \end{aligned}$$

D'où le coefficient multiplicateur réciproque

$$\begin{aligned}CM_r &= \frac{1}{CM} \\&= \frac{1}{1,20} \\&\approx 0,83333\end{aligned}$$

Et le taux réciproque est donc (en pourcentage)

$$\begin{aligned}t_r &= 100 \times (CM_r - 1) \\&\approx 100 \times (0,8333 - 1) \\&\approx -16,67\end{aligned}$$

Pour qu'il retrouve sa valeur initiale il faut lui appliquer une baisse de 16,67 %.

EXERCICE 19. En France la consommation de yaourts, par an et par personne, a baissé de 22,7 % entre 1998 et 2008, pour atteindre 51,5 kg. Calculez la consommation annuelle par personne en 1998.

Exercice 19. $V_D \approx 66,6$ kg.

EXERCICE 20. Le montant total des dons effectués par les Français a augmenté de 4 % entre 2014 et 2015 pour atteindre 4,5 milliards d'euros. Quel était le montant des dons en 2014.

Exercice 20. $V_D \approx 4,3$.

Exercices.

EXERCICE 21. Étude du marché solaire thermique dans 21 pays de l'Union européenne.

Sur l'année	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Croissance par rapport à l'année précédente en pourcentage (%)	11	25	47	-9	60	-10

Calculez le taux d'évolution global pour ces six années.

Exercice 21.

$$\begin{aligned}CM_g &\approx 2,6727246 \\t_g &\approx 167,27 \%\end{aligned}$$

EXERCICE 22. *L'accord de Kyoto (1997)* Le principal gaz à effet de serre (GES) est le dioxyde de carbone, noté CO_2 . En 2011, la France a émis 486 mégatonnes de GES en équivalent CO_2 contre 559 mégatonnes en 1990.

1. Dans l'accord de Kyoto, la France s'est engagée à réduire ses GES de 8 % entre 1990 et 2012. Peut-on dire qu'en 2011 la France respectait déjà cet engagement ? Justifier la réponse.
2. Sachant que les émissions de 2011 ont marqué une baisse de 5,6 % par rapport à 2010, calculer le nombre de mégatonnes en équivalent CO_2 émises par la France en 2010. Arrondir le résultat à 0,1.

Exercice 22.

1. Déterminons le taux d'évolution, t , des GES entre 1998 et 2011.

$$t = \frac{V_A - V_D}{V_D}$$

Or $V_D = 559$ et $V_A = 486$ donc :

$$t = \frac{486 - 559}{559} \\ \approx -0,1306$$

Les émissions de GES ont diminué de 13,06 % entre 1998 et 2011 donc

la France respectait ses engagements dès 2011.

2. Calculons la quantité, V_D , de GES en 2010.

$$V_D = \frac{V_A}{CM}$$

Or le coefficient multiplicateur correspondant à une baisse de 5,6 % est

$$CM = 1 + t \\ = 1 + \frac{-5,6}{100} \\ = 0,944$$

donc

$$V_D = \frac{486}{0,944} \\ \approx 514,83$$

La France a émis 514,8 mégatonnes de GES en 2010.

EXERCICE 23. Sur deux années le nombre d'abonnés à un journal provincial augmente de 5 % puis augmente de 8 % pour atteindre 62 370 abonnés. Calculez le nombre d'abonnés deux ans avant.

Exercice 23. $V_D = \frac{V_A}{CM_1 \times CM_2} \approx 55000$.

EXERCICE 24. Durant les vacances un article a augmenté de 15 % en juillet puis de 20 % en août. À quel taux est-il soldé en septembre pour revenir à son prix initial.

Exercice 24. $t_r = CM_1 \times CM_2 - 1 \approx -27,54$.

EXERCICE 25. Un cadre dirigeant avait un salaire de 7 000 € mensuel et un complément annuel de 90 000 € pour couvrir tous ses frais (transports, hôtellerie, rémunération d'un collaborateur ...). Par mesure comptable, on supprime le complément et on augmente le salaire. De quel pourcentage faut-il augmenter le salaire pour couvrir les mêmes frais ?

Exercice 25. $\frac{12 \times 7000 + 90000}{12} = 14500$
 $\frac{14500 - 7000}{7000} \times 100 \approx 107,14$.