Proportion et pourcentage.

I Calculer une proportion.

1 Proportion.

Une proportion est un nombre qui représente un ratio c'est-à-dire un rapport de deux grandeurs de même nature.

Proportion	Ratio	Proportionnalité
$\dfrac{2}{3}$ ou $\dfrac{4}{6}$	$2:3$ ou $4:6$	voir tableau ci-dessous

3	6
2	4

Le tableau de proportionnalité regroupe des grandeurs qui sont dans un même ratio.

La proportion est le coefficient multiplicateur qui permet de passer de la première à la deuxième ligne du tableau de proportionnalité : $\frac{2}{3} \times 6 = 4$.

Exemples.

1. « Trois élèves sur cinq choisissent la spécialité mathématiques. » Nous traduirons cela en disant que la proportion d'élèves choisissant la spécialité mathématique est $\frac{3}{5}$.
2. Dans une classe de 24 élèves il y a 2 filles. La proportion de filles dans la classe est de $p = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$.

2 Appliquer une proportion.

Appliquer une proportion c'est multiplier une grandeur par la proportion. Ainsi les deux tiers de 6 s'obtiennent en faisant : $\frac{2}{3} \times 6 = 4$.

Exemples.

1. Si un tiers des élèves d'une classe de 33 élèves font régulièrement leur travail, alors le nombre d'élèves qui travaillent régulièrement est $\frac{1}{3} \times 33 = 11$.
2. Si la proportion de mangeurs de choucroute à la Réunion est de 1 millième, alors, comme il y a 856 000 habitants à la Réunion, le nombre de mangeurs de choucroute est : $\frac{1}{1000} \times 856\,000 = 856$.

Exercice 1.

On appelle « téléviseur 16/9 » un téléviseur dont la longueur de l'écran est égale aux $\dfrac{16}{9}$ de sa largeur.
Pour un tel téléviseur, calculer le longueur de l'écran lorsque la largeur est $41,4$ cm.

Correction de l'exercice 1

$\frac{16}{9} \times 41,4$ cm $= 73,6$ cm.

Exercice 2.

Pour 1 080 francs, le père de Pierre a acheté 4 cravates et 3 chemises.

Sachant que le prix d'une cravate est les $\dfrac{3}{5}$ de celui d'une chemise : quels sont les prix d'une cravate et d'une chemise ?

Correction de l'exercice 2

Notons x le prix d'une chemise. Le prix d'une cravate est de $\frac{3}{5} \times x$ donc on a :

$$\begin{aligned} 4 \times \frac{3}{5} \times x + 3 \times x &= 1080 \\ \frac{27}{15} \times x &= 1080 \\ \frac{15}{27} \times \frac{27}{15} x &= \frac{15}{27} \times 1080 \\ x &= 600 \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\text{une chemise coût 600 francs.}}$$

Comme $\frac{3}{5} \times 600 = 360$

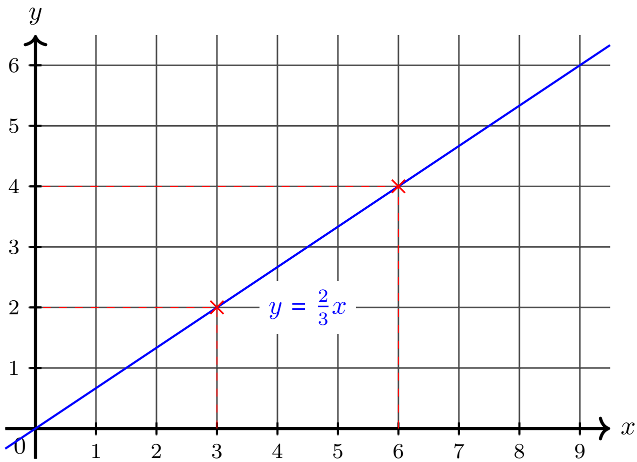
$$\boxed{\text{une cravate coût 360 francs.}}$$

3 Représentation graphique d'une situation de proportionnalité.

Pour le tableau de proportionnalité suivant

x	3	6	9
y	2	4	6

nous pouvons considérer que la première ligne correspond à des abscisses et la seconde à des ordonnées. Les points dans le cas d'une proportionnalité sont alignés avec l'origine du repère.



Ici les abscisses, x, et ordonnées, y, des points de la droite sont liées par l'équation $y = \frac{2}{3}x$.

Nous dirons aussi que la droite est la courbe représentative d'une fonction linéaire dont le coefficient directeur est $\frac{2}{3}$.

II Les pourcentages.

Pour se représenter facilement les proportions il est traditionnel d'exprimer la proportion sous forme d'une expression fractionnaire dont le dénominateur est 100 le numérateur est alors appelé un pourcentage.

Autrement dit un pourcentage est nombre exprimé non pas en unités mais en centièmes.

Pour obtenir un pourcentage il suffit de multiplier la proportion par 100.

L'usage du pourcentage étant socialement répandu il peut sembler plus simple de l'utiliser. Mathématiquement, le pourcentage n'a pas davantage par rapport à une fraction ou une écriture décimale.

Exemples.

1. $\frac{2}{5} = \frac{40}{100}$ donc une proportion de $\frac{2}{5}$ correspond à 40 %.
2. $34,78\ \% = \frac{34,78}{100} = 0,3478$.
3. Si lors d'une élection 234 citoyens sur un total de 650 votent pour le candidat Dugenou, alors $\frac{234}{650} \times 100 = 36$ donc 36 %.

Exercice 3.

Dans deux classes de 24 élèves chacun, on demande aux collégiens combien de temps ils passent dans l'autobus pour se rendre au collège (tous prennent l'autobus).

1. Sachant que tous les élèves ont répondu, reproduire et compléter le tableau ci-dessous présentant les résultats de cette enquête :

Temps t en min	$0 \leqslant t < 15$	$15 \leqslant t < 30$	$30 \leqslant t < 45$	$t \geqslant 45$
Effectif	6	24		3

2. Quel est l'effectif d'élèves passant au moins 30 minutes dans l'autobus pour se rendre au collège ?
3. En déduire le pourcentage d'élèves passant au moins une demi-heur dans l'autobus pour se rendre au collège.

Exercice 4.

Le tableau ci-dessous indique, en 1982, le bilan des accidents corporel de la circulation dans un pays. Compléter le tableau. Chaque résultat pour les pourcentages sera arrondi au dixième près.

	Nombre des tués	Nombre de blessés légers	Nombre de blessés graves	Nombre total d'accidentés
Effectifs	12 500	321 000	84 500	418 000
Pourcentages				

III Les études de populations.

1 Proportion d'une sous-population dans une population.

Nous allons préciser les proportions intervenant dans le domaine des statistiques.

En statistique une *population* est un ensemble de trucs (des hommes, des animaux, des objets, ...) tous de même nature et que nous souhaitons étudier."Les trucs étudiés sont appelés des individus.

Le plus souvent il s'agira de collecter des données sur un *caractère* (un aspect des individus : taille, poids, couleur, ...) des individus de la population. L'ensemble des données constituant alors une *série statistique*.

Si dans une première population de 12 individus il y a 10 filles et dans une seconde population de 24 individus il y en a 12, dans quelle population y a-t-il le plus de filles ? La question est trop imprécise et deux réponses sont possibles :

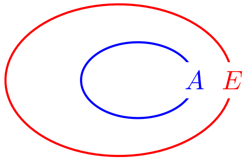
— il y a plus de filles dans la seconde population que dans la seconde,

— il y a plus de filles dans la première population par rapport au nombre d'élèves de la classe.

Dans le second cas nous comparons des proportions.

Définition 1

Soient E une population d'individus et A une sous-population de la population E.



Notons $\#A$ et $\#E$ les effectifs des populations respectivement A et E.

Nous appellerons *proportion de la sous-population A dans la population E*

$$P_E(A) = \frac{\#A}{\#E}.$$

Exemples.

1. Lors de tests sur un échantillon de 1240 personnes, on observe que 356 sont séro-positives. Donc la proportion, en pourcentage, de la population qui peut être estimée séro-positive est de $\frac{356}{1240} \times 100 \approx 28,71$ (en arrondissant au centième).
2.

Remarques.

1. On retrouve la formulation habituelle : $\frac{\text{effectif}}{\text{effectif total}}$.
2. Il est bien sur possible d'exprimer cette proportion en pourcentage.
3. La proportion d'une sous-population dans une population est un nombre compris entre 0 et 1.

   Le pourcentage d'une sous-population dans une population est un nombre compris entre 0 et 100.
4. En statistique E est appelée la population de référence.
5. En mathématiques pures plutôt que de parler de population nous parlerons d'*ensemble fini*. Le terme *cardinal* est préféré à effectif.
6. La notation mathématique pour indiquer que A est une sous-population de E est : $A \subset E$. Dans ce cas on dit que A est *inclus* dans E.

Exercice 5. ⚽

Dans une classe de première de 35 élèves, 9 élèves font du ski.
Calculez le pourcentage d'élèves de la classe qui font du ski arrondi à 10^{-2} près.

Correction de l'exercice 5

Notons E l'ensemble des élèves de la classe et A l'ensemble de ceux qui font du ski.

Calculons $p_E(A)$.

Par définition la proportion est de

$$P_E(A) = \frac{\#A}{\#E}.$$

Or $\#A = 9$ et $\#E = 35$ donc :

$$\begin{aligned} P_E(A) &= \frac{9}{35} \\ &\approx 0,2571 \end{aligned}$$

25, 71 % des élèves font du ski.

Exercice 6.

Une salle de spectacle contient 9 000 places assises et 21 000 places debout.

1. Calculez le pourcentage de places assises.
2. Déterminez le pourcentage de places debout.

Correction de l'exercice 6

1. Calculons la proportion, $P_E(A)$, de places assises.

   Notons A l'ensemble des places assises et E l'ensemble de toutes les places.
   Nous avons $\#A = 9000$ (le nombre de places assises) et $\#E = 9000 + 21000 = 30000$ (le nombre total, assis ou debout, de places).
   Donc le pourcentage de places assises est :

$$\begin{aligned} P_E(A) &= \frac{\#A}{\#E} \\ &= \frac{9000}{30000} \\ &= 0,3 \end{aligned}$$

   30 % des places sont des places assises.

2. Calculons la proportion, $p_E(B)$, de places debout.

   Notons B l'ensemble des places debout.
   Nous avons $\#B = 21000$.

Le pourcentage de places debout est :

$$\begin{aligned} P_E(B) &= \frac{\#B}{\#E} \\ &= \frac{21000}{30000} \\ &= 0,7 \end{aligned}$$

70 % des places sont des places debout.

2 Divers calculs avec les pourcentages d'une sous-population dans une population.

Exercice 7. ☯

1. Dans un petit port, les cinq-sixièmes des 720 habitants vivent de la pêche. Combien d'habitants vivent de la pêche ?
2. Dans un village voisin, 697 habitants vivent de l'agriculture, ce qui représente 82% de la population. Combien y a-t-il d'habitants dans ce village ?

Correction de l'exercice 7

1. Il s'agit d'appliquer une proportion.

   Calculons le nombre d'habitants n qui vivent de la pêche.

$$n = \frac{5}{6} \times 720$$

$n = 600$.

2. Notons A l'ensemble des habitants vivant de l'agriculture et E celui des habitant du village.
   Calculons $\#E$.

$$P_E(A) = \frac{\#A}{\#E}$$

Nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned}
P_E(A)\times\#E &= \frac{\#A}{\#E}\times\#E \\
P_E(A)\times\#E &= \#A \\
\frac{P_E(A)\cdot\#E}{P_E(A)} &= \frac{\#A}{P_E(A)}, \text{ car } P_E(A)>0 \\
\#E &= \frac{\#A}{P_E(A)} \\
&= \frac{697}{82} \\
&\approx 163\,085
\end{aligned}$$

Il y a 163 085 candidats à l'examen du bac.

Exercice 8.

Un marchand a des crayons bleus, des crayons rouges et crayons verts. Les crayons bleus représentent 53 % de la totalité des crayons.

Les crayons rouges représentent les $\dfrac{3}{10}$ de la totalité des crayons.

1. Les crayons verts représentent un pourcentage de la totalité des crayons. Quel est ce pourcentage ?
2. En tout le marchand a 300 crayons. Combien a-t-il de crayons bleus ?

Correction de l'exercice 8

1. La proportion des crayons bleus est $\frac{53}{100}=0,53$ et la proportion des crayons rouges est $\frac{3}{10}=0,3$ donc la proportion de crayons verts est

$$\begin{aligned}
P_v &= 1-0,53-0,3 \\
&= 0,17
\end{aligned}$$

17 % des crayons sont verts.

2. Le nombre de crayons bleu est

$$n_b = \frac{53}{100}\times 300$$

$n_b = 159.$

Exercice 9.

1. Une année le taux de réussite au baccalauréat technologique est de $79,7$ %, ce qui représente 129 979 candidats reçus.
   Calculez le nombre de candidats à cet examen.
2. Dans un lycée le taux de réussite est de 95 %, et il y a eu 12 refusés.
   Calculez le nombre de candidats dans ce lycée.

Correction de l'exercice 9

1. Notons : A l'ensemble des candidats reçus et E celui de tous le candidats.
   Nous utiliserons parfois dans la suite la notation moderne du cardinal qui est calquée sur de la valeur absolue : $\#A = A|$.

   Calculons $|E|$.

$$P_E(A) = \frac{|A|}{|E|}$$

   équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 0,797 &= \frac{129979}{|E|} \\ 0,797|E| &= 129979 \\ |E| &= \frac{129979}{0,797} \end{aligned}$$

$$\boxed{|E| \approx 163085.}$$

2. Notons : A l'ensemble des lycéens recalés et E celui des candidats à l'examen.
   Calculons $\#E$.

$$P_E(A) = \frac{\#A}{\#E}$$

   Nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned} 5 &= \frac{12}{\#E}, \quad \text{car } 100 - 95 = 5 \\ 5 \times \#E &= 12 \\ \#E &= \frac{12}{5} \\ \#E &= 240 \end{aligned}$$

Il y a 240 candidats dans ce lycée.

Exercice 10.

Le salaire brut mensuel de Sophie est de 13 200 €. Les cotisations salariales représentent 23 % du salaire brut.
Calculez le salaire hors cotisations salariales.

Correction de l'exercice 10

Nous allons ici raisonner comme pour des populations ce qui en fait pas le cas. Il s'agit d'une situation de proportionnalité mais pas de proportion.

Notons : $\#A$ le salaire hors cotisation salariale, $P_E(A) = 1 - 0,23 = 0,77$ et $\#E = 13200$ le salaire brut.

Déterminons $\#A$.

$$p_E(A) = \frac{\#A}{\#E}$$

équivaut successivement à :

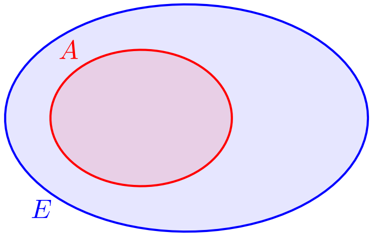
$$\begin{aligned} 0,77 &= \frac{\#A}{13200} \\ 0,77 \times 13200 &= \#A \\ 10164 &= \#A \end{aligned}$$

Le salaire hors cotisation salariales est de 10 164 €.

3 Ensembles et sous-ensembles.

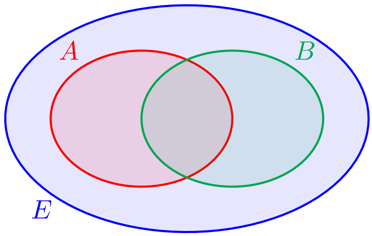
Définition 2

Nous dirons que A est un *sous-ensemble* de E, ou une*partie* de E si tous les éléments qui appartiennent à A appartiennent aussi à E.
Dans ce cas nous noterons : $A \subset E$.



Remarques.

1. $A \subset B$ se lit « A est inclus dans B ».
2. La représentation typique illustrant deux sous-ensembles A et B de l'ensemble E consiste au diagramme de Venn suivant.



Cette schématisation permet de comprendre les diverses situation que nous rencontrerons.

Exemples.

1. Un sondage dans un lycée donne :

	Pratiquent un sport	Ne pratiquent pas de sport	Total
Fumeurs	40	120	160
Non fumeurs	430	210	640
Total	470	330	800

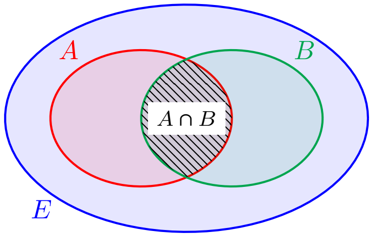
L'ensemble des élèves fumeurs est inclus dans l'ensemble des lycéens. L'ensemble des élèves fumeurs contient 160 éléments.

L'ensemble des élèves non fumeurs et qui ne pratiquent pas de sport est inclus dans l'ensemble des élèves non fumeurs. Le cardinal de l'ensemble des élèves non fumeurs et qui ne pratiquent pas de sport est 210.

2. L'ensemble des Réunionnais est inclus dans l'ensemble des Français.
3. Plus généralement en reprenant la terminologie des statistiques : une sous-population est incluse dans une population.
4. $\{3; a\} \subset \{3; b; 4; a\}$ mais $\{3; a\} \not\subset \{3; b; 4\}$.

Définition 3

L'ensemble des éléments communs à A et B, c'est-à-dire l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et B, est appelé l'*intersection de* A et B et est noté $A \cap B$.



Remarques.

1. $A \cap B$ se lit « A inter B ».

Exemples.

1. Reprenons l'exemple ci-dessus :

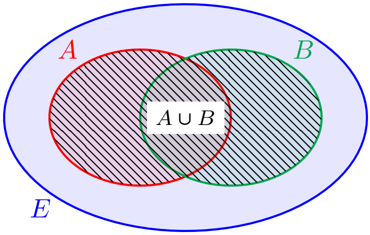
	Pratiquent un sport	Ne pratiquent pas de sport	Total
Fumeurs	40	120	160
Non fumeurs	430	210	640
Total	470	330	800

L'intersection de l'ensemble des fumeurs et de l'ensemble des non sportifs est un ensemble qui contient 120 éléments.

2. L'intersection entre l'ensemble des élèves de premières et l'ensemble des élèves du lycée étudiant l'allemand est l'ensemble formé des élèves de première qui étudient l'allemand.
3. L'intersection entre l'ensemble des nombres pairs et celui des nombres impairs ne contient aucun élément. Nous dirons qu'il s'agit de *l'ensemble vide* et nous le noterons $\varnothing$.
4. L'intersection ente l'ensemble des nombres positifs et négatifs est un ensemble qui ne contient que 0 : $\{0\}$.
5. $\{1; 2; a; b\} \cap \{2; 3; b; z\} = \{2; b\}$.

Définition 4

L'ensemble de tous les éléments qu'ils soient pris dans A ou dans B est appelé la ***réunion de*** A et B et est notée $A \cup B$.



Remarques.

1. $A \cup B$ se lit « A union B ».

Exemples.

1. Reprenons l'exemple ci-dessus :

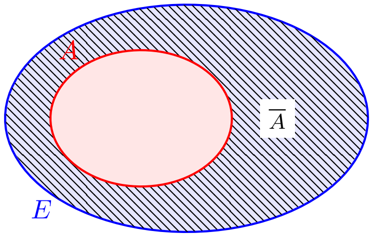
	Pratiquent un sport	Ne pratiquent pas de sport	Total
Fumeurs	40	120	160
Non fumeurs	430	210	640
Total	470	330	800

   La réunion de l'ensemble des élèves sportifs ou non fumeur contient : $40 + 430 + 210 = 680$ élèves.

2. La réunion des élèves qui étudient l'anglais, l'allemand, l'espagnol ou le chinois est l'ensemble de tous les élèves du lycée.
3. La réunion de l'ensemble des nombres pairs et celui des nombres impairs contient tous les nombres entiers.
4. $\{1; 2; a; b\} \cup \{2; 3; b; z\} = \{1; 2; a; b; 3; z\}$.

Définition 5

Le complémentaire de A dans E est formé de tous les éléments de E qui ne sont pas dans A. On le note $\overline{A}$ ou encore $E \setminus A$.



Remarques.

1. $\overline{A}$ se lit « le complémentaire de A ».
2. $E \setminus A$ se lit « le complémentaire de A dans E » ou encore « E privé de A ».

Exemples.

1. Reprenons l'exemple ci-dessus :

	Pratiquent un sport	Ne pratiquent pas de sport	Total
Fumeurs	40	120	160
Non fumeurs	430	210	640
Total	470	330	800

   Le complémentaire de l'ensemble des élèves fumeurs est l'ensemble des élèves non fumeurs.

   Le complémentaire de l'ensemble des élèves fumeurs et sportifs est la réunion de l'ensemble des élèves non sportifs et non fumeurs. Il a donc pour cardinal : $430 + 210 + 120 = 760$.
2. Le complémentaire de l'ensemble des nombres pair (dans l'ensemble des nombres entiers) est l'ensemble des nombres impairs.
3. Le complémentaire de l'ensemble des filles de la classe est l'ensemble des garçons de la classe.
4. Le complémentaire de $\{1; 2; a; b\}$ dans $\{1; 2; 3; a; b; c\}$ est $\{3; c\}$.

Exercice 11. ☯

Le tableau suivant donne le mode de transport des 1 292 salariés d'une entreprise pour se rendre à leur travail. On note :

- A l'ensemble des employés qui utilisent les transports en commun.
- B l'ensemble des employés qui viennent à pied.
- C l'ensemble des employés qui utilisent leur voiture.
- H l'ensemble des hommes.

	H	$\overline{H}$
A	210	380
B	52	80
C	450	120

1. Recopiez ce tableau en indiquant le pourcentage d'employés plutôt que le nombre d'employés.
2. Expliquez ce qu'est l'ensemble $\overline{H}$.
3. Calculez la proportion d'hommes dans l'entreprise.
4. Expliquez ce qu'est $A \cap H$ puis calculez le pourcentage d'employés dans cet ensemble.
5. Expliquez ce qu'est $C \cap \overline{H}$ puis calculez le pourcentage d'employés dans cet ensemble.
6. Expliquez ce qu'est $\overline{C}$ puis calculez le pourcentage d'employés dans cet ensemble.

Correction de l'exercice 11

1. En arrondissant au centième :

	H	$\overline{H}$
A	$16,25$	$29,41$
B	$4,02$	$6,19$
C	$34,83$	$9,29$

2. $\overline{H}$ est l'ensemble des femmes (ceux qui ne sont pas hommes).
3. La proportion d'hommes dans l'entreprise est de :

$$P(H) = \frac{210 + 52 + 450}{1292}$$

$$\boxed{P(H) \approx 0,5511.}$$

Nous sommes dans un cas particulier : la population a été séparée en sous-population disjointe (sans individus en commun) par le tableau. Dans ce cas on peut additionner les proportions. $P(H) \approx 16,25 + 4,02 + 34,83$.

4. $A \cap H$ est l'ensemble des personnes qui utilisent les transports en commun et qui sont des hommes, autrement dit c'est l'ensemble des hommes qui prennent des transports en commun.

$$\begin{aligned} P(A \cap H) &= \frac{210}{1292} \\ &\approx 0,1625 \end{aligned}$$

> 16,25 % des employés sont des hommes qui prennent les transports en commun.

On retrouve bien la première case du tableau.

5. $C \cap \overline{H}$ est l'ensemble des employés qui utilisent leur voiture et qui ne sont pas des hommes. Autrement dit : ce sont les femmes qui ne utilisent leur voiture.

$$\begin{aligned} P(C \cap \overline{H}) &= \frac{120}{1292} \\ &\approx 0,0929 \end{aligned}$$

> 9,29 % des employés sont des femmes qui prennent leur voiture.

6. $\overline{C}$ est l'ensemble des employés qui n'utilisent pas leur voiture.

$$\begin{aligned} P(\overline{C}) &= \frac{210 + 52 + 380 + 80}{1292} \\ &\approx 0,5588 \end{aligned}$$

> 55,88 % des employés n'utilisent pas leur voiture.

Là encore nous aurions pu additionner les pourcentages : $16,25 + 4,02 + 29,41 + 6,19$.

Proposition 1

Soient :

. E un ensemble,

. A et B deux sous-ensembles de E.

(i) $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.

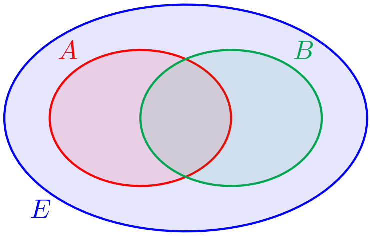
(ii) Si A et B sont quelconques, alors $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.

(iii) Si A et B sont *disjoints* alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Démonstration

Remarquons que le (iii) se déduit du (ii).

Pour démontrer le (i) et le (ii) nous raisonnerons sur le diagramme de Venn.



(i)

■

Exercice 12.

Un institut de sondage a interrogé 800 personnes des la manière suivante :

- 25 % des personnes interrogées habitent en zone rurale, les autres en zone urbaine ;
- 60 % des personnes interrogées ont été consultées par téléphone, les autres personnes ayant été interrogées en « face à face » par un enquêteur ;
- 55 % des personnes habitant en zone urbaine ont été consultées par téléphone.

1. Reproduisez et complétez le tableau d'effectifs suivant :

	Habitant en zone rurale	Habitant en zone urbaine	Total
Personnes interrogées par téléphone			
Personnes interrogées en « face à face »			
Total	200		800

2. (a) Calculez la proportion de personnes habitant en zone urbaine parmi celles qui ont été consultées par téléphone : donner le résultat sous la forme d'un nombre décimal, puis sous la forme d'un pourcentage.

   (b) Calculez la proportion de personnes habitant en zone urbaine parmi celles interrogées en « face à face » : donner le résultat sous la forme d'un nombre décimal arrondi à 10^{-4} près, puis sous la forme d'un pourcentage.

   (c) L'ordre des proportions (ou fréquences) obtenues en (a) et en (b) est-il le même que celui des effectifs des sous-populations correspondantes ?

Correction de l'exercice 12

1.

	Habitant en zone rurale	Habitant en zone urbaine	Total
Personnes interrogées par téléphone	150	330	480
Personnes interrogées en « face à face »	50	270	320
Total	200	600	800

2. (a) $\frac{330}{480} = 0,6875$.

   (b) $\frac{270}{320} = 0,84375$.

   (c) Non.

Exercice 13. ⚽

Un restaurant sert 600 couverts par service, en proposant un menu à 16 euros et un menu à 24 euros. Pour l'inauguration de son restaurant, le gérant offre à chacun de ses clients soit un café, soit un apéritif.

- 60 % des clients ont choisi un café, les autres un apéritif.
- La moitié des clients ont choisi un menu à 24 euros.
- Parmi ceux qui choisissent le menu à 24 euros, 75 % ont choisi un café.

1. Complétez après l'avoir reproduit le tableau suivant :

	Menu à 16 €	Menu à 24 €	Total
Clients ayant choisi un café			360
Clients ayant choisi un apéritif			
Total			600

2. On note A la sous-population des clients ayant choisi un menu à 16 euros et B la sous-population des clients ayant choisi un apéritif.

   (a) Définissez par une phrase les sous-populations $A \cap B$ et $A \cup B$.

   Dans ce qui suit les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

   (b) Calculez les proportions (ou fréquences) respectives, notées $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$, des sous-populations A, B, $A \cap B$ et $A \cup B$ dans la population des 600 couverts.

   (c) Calculez $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Que remarquez-vous ?

   (d) On note C la sous-population des clients ayant choisi un café. On note $P(C)$ la proportion de la sous-population C dans la population des 600 couverts.
   Les deux sous-populations A et B sont-elles disjointes ?
   Même question pour les deux sous-populations B et C.
   Calculez $P(B) + P(C)$.

Correction de l'exercice 13

1.

	Menu à 16 €	Menu à 24 €	Total
Clients ayant choisi un café	135	225	360
Clients ayant choisi un apéritif	165	75	240
Total	300	300	600

2. (a) $A \cap B$: client ayant choisi un menu à 16 € et un apéritif.
   $A \cup B$: client ayant choisi un menu à 16 € ou un apéritif.

   (b)

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{300}{600} \\ &= 0,5 \\ P(B) &= \frac{240}{600} \\ &= 0,4 \\ P(A \cap B) &= \frac{135}{600} \\ &= 0,225 \\ P(A \cup B) &= \frac{165 + 135 + 225}{600} \\ &= 0,875 \end{aligned}$$

   (c) $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$.

   (d) A et B ne sont pas disjointes car il y a des éléments dans l'intersection : les clients qui prennent un café et menu à 16 €.
   B et C sont disjointes puisque les clients sont tenus de choisir soit un café soit un apéritif.
   $P(B) + P(C) = P(B \cup C)$.

Exercice 14. ⚽

Un magasin vend deux types de téléphones mobiles : des modèles m_1 et des modèles m_2.
Ce magasin propose deux types de forfait mensuel : un forfait 1 et un forfait 2.
Le service commercial effectue une enquête sur un échantillon de 2 000 clients ayant acheté dans ce magasin un téléphone et un seul, et ayant opté pour un seul des forfaits proposés.
Sur les 2 000 clients interrogés, 1 200 ont acheté le modèle m_1 et 960 ont choisi le forfait F_1.
Parmi les clients ayant acheté le modèle m_1, 32 % ont pris le forfait F_1.

1. Complétez après l'avoir reproduit, le tableau d'effectifs suivant :

	Modèle m_1	Modèle m_2	Total
Forfait 1			960
Forfait 2			
Total	1 200		2 000

2. On note F_1 la sous-population des clients interrogés ayant choisi le forfait 1 et M_2 la sous-population ayant choisi le modèle m_2.
   (a) Calculez, sous la forme d'un nombre décimal, la proportion $P(F_1)$ de clients interrogés qui ont choisi le forfait 1.
   (b) Calculez, sous la forme d'un nombre décimal, la proportion $P(M_2)$ de clients ayant choisi le modèle m_2.
   (c) Définissez par une phrase en français les sous-populations $F_1 \cap M_2$ et $F_1 \cup M_2$.
   (d) Calculez, sous la forme d'un nombre décimal, la proportion $P(F_1 \cap M_2)$ de clients qui appartiennent à la sous-population $F_1 \cap M_2$ parmi les clients interrogés.
   (e) Déduisez de ce qui précède la proportion $P(F_1 \cup M_2)$ de clients qui appartiennent à la sous-population $F_1 \cup M_2$ parmi le clients interrogés : sous la forme d'un nombre décimal puis sous la forme d'un pourcentage.

Correction de l'exercice 14

1.

	Modèle m_1	Modèle m_2	Total
Forfait 1	384	576	960
Forfait 2	816	224	1040
Total	1 200	800	2 000

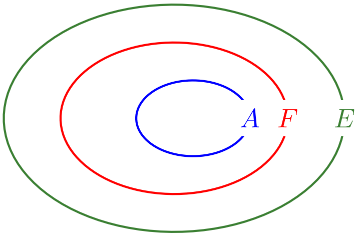
2. (a) $P(F_1) = \frac{960}{2000} = 0,48$.
   (b) $P(M_2) = \frac{800}{2000} = 0,4$.
   (c) $F_1 \cap M_2$ ensemble des personnes ayant choisi le forfait 1 et le modèle 2.
   $F_1 \cap M_2$ ensemble des personnes ayant choisi le forfait 1 ou le modèle 2.
   (d) $P(F_1 \cap M_2) = \frac{576}{2000} = 0,288$.

(e) $P(F_1 \cap M_2) + P(F_1 \cup M_2) = P(F_1) + P(M_2)$ donc $P(F_1 \cup m_2) = 0,48 + 0,4 - 0,288 = 0,592$.

4 Proportion de proportion.

Proposition 2

Soient E une population d'individus, F une sous-population de E et A une sous-population de F.



$$P_E(A) = P_E(F) \times P_F(A).$$

Démonstration

Par définition : $p_E(F) = \frac{\#F}{\#E}$ et $p_F(A) = \frac{\#A}{\#F}$.

Donc :

$$\begin{aligned} p_E(F) \times p_F(A) &= \frac{\#F}{\#E} \times \frac{\#A}{\#F} \\ &= \frac{\#F \times \#A}{\#E \times \#F} \\ &= \frac{\#A}{\#E} \\ &= p_E(A) \end{aligned}$$

■

Remarques.

1. Nous avons des inclusions successives : $A \subset F \subset E$.
2. Pour déterminer une proportion de proportion on fait le produit des proportions.

3. Les proportions fonctionnent de façon multiplicative. Vous retrouverez cette idée en classe de première en parlant de *principe multiplicatif*.
4. Cette proposition peut être vue comme l'application d'une proportion ($\frac{p_F(A)}{100}$) à un pourcentage ($p_E(F)$).
5. Dans cette proposition il y a deux populations de références : E et F.
6. Ce résultat n'utilise pas les effectifs des populations mais seulement les proportions. Nous utiliserons ce résultat lorsque les seules informations sont des proportions.

Exemples.

1. 18 % des amateurs de jeux vidéos n'ont pas le bac. Parmi ceux-ci 7 % n'ont pas le brevet des collèges.
   Comme : $\frac{7}{100} \times \frac{18}{100} = \frac{126}{1000} = \frac{12{,}6}{100}$ on peut dire que $12,6$ % des joueurs de jeux vidéos n'ont pas le brevet des collèges.
2. $\frac{4}{3}$ de $\frac{9}{10}$ est donc $\frac{4}{3} \times \frac{9}{10} = \frac{2}{15}$.

Exercice 15. ☯

Un serveur de films en streaming est composé de 30 % de films d'action et, parmi ces films d'action, 60 % sont des films avec Bruce Willis.
Quelle est la proportion de films avec Bruce Willis sur le serveur ?

Correction de l'exercice 15

Notons E l'ensemble des films proposé, F l'ensemble des films d'actions et A l'ensemble des films avec Bruce Willis.

Nous avons bien la situation des inclusions successives : A est une sous-population de F qui est elle-même une sous-population de E.

Calculons $P_E(A)$.

Nous savons que $P_E(F) = 30$ et $P_F(A) = 60$ donc

$$\begin{aligned} P_E(A) &= P_E(F) \times P_F(A) \\ &= \frac{30}{100} \times \frac{60}{100} \\ &= 0,18 \end{aligned}$$

18 % des films du serveur sont des films de Bruce Willis.

Exercice 16.

Dans une classe 45 % des élèves sont des garçons et $\frac{1}{3}$ des garçons portent des lunettes. Il y a 3 garçons à lunettes dans la classe.

1. Combien y a-t-il d'élèves dans cette classe ?
2. Combien y a-t-il de filles dans cette classe ?

Correction de l'exercice 16

Notons E l'ensemble des élèves, F l'ensemble des garçons et A l'ensemble des garçons à lunettes.

1. Calculons $\#E$.

   D'après l'énoncé $P_F(A) = \frac{1}{3}$ et $P_E(F) = \frac{45}{100}$ donc le pourcentage de garçons à lunettes dans la classe est

$$\begin{aligned} P_E(A) &= P_E(F) \times P_F(A) \\ &= \frac{45}{100} \times \frac{1}{3} \\ &= 0,15 \end{aligned}$$

   Mais on peut aussi écrire que :

$$P_E(A) = \frac{\#A}{\#E}$$

   Nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned} 15 &= \frac{3}{\#E} \\ 15 \times \#E &= \frac{3}{\#E} \times \#E \\ 15 \times \#E &= 3 \\ \frac{0,15\#E}{0,15} &= \frac{3}{0,15} \\ \#E &= 20 \end{aligned}$$

   Il y a vingt élèves dans la classe.

2. Notons G l'ensemble ds filles de la classe.

   Calculons le nombre, $|G|$, de filles dans la classe.

   Il s'agit simplement de calculer un pourcentage d'une quantité, c'est-à-dire d'appliquer une proportion.

Le nombre de garçons dans la classe est :

$$\begin{aligned}\#F &= \frac{P_E(F)}{100} \times \#E \\ &= \frac{45}{100} \times 20 \\ &= 9\end{aligned}$$

Donc : $\#G = 20 - 9$.

Il y a 11 filles dans la classe.

Exercice 17.

Dans une société les cadres représentent 40 % des salariés et les cadres supérieurs représentent un 20 % des cadres.
Quelle est la proportion de cadres supérieurs par rapport aux salariés de cette société ?

Correction de l'exercice 17

Notons E l'ensemble des salariés, F l'ensemble des cadres et A l'ensemble des cadres supérieurs.

Nous avons bien la situation des inclusions successives : $A \subset F \subset E$.

Calculons $p_E(A)$.

Nous savons que $p_E(F) = 0,4$ et $p_F(A) = \frac{1}{5}$ donc

$$\begin{aligned}P_E(A) &= P_E(F) \times P_F(A) \\ &= 0,4 \times \frac{1}{5}\end{aligned}$$

$P_E(A) = 0,08.$

Exercice 18.

Une société de téléphonie propose trois mode d'abonnement différents :

- forfait A : moins de 2 h de communication ;
- forfait B : moins de 4 h de communication ;
- forfait C : temps de communication illimité.

La part de clients ayant souscrit le forfait A est de $0,35$ et les clients ayant choisi le forfait B représentent la moitié de la clientèle.
De plus 80 % des clients ayant choisi le forfait C ont également choisi l'internet illimité.

1. Quelle est la part de clients ayant choisi le forfait illimité ? Exprimez ce résultat en pourcentage.
2. Quelle est la part des clients qui ont choisi un forfait C mais sans l'internet illimité.

Correction de l'exercice 18

1. Notons E l'ensemble de tous les clients.

   Calculons $P_E(C)$.

   Nous savons que
   $$P_E(A) + P_E(B) + P_E(C) = 1. \quad (1)$$
   En exprimant les proportions en pourcentages nous aurions que le total doit être de 100 % = $\frac{100}{100}$ = 1.
   (1) est successivement équivalente à

   $$\begin{aligned} 0,35 + \frac{1}{2} + P_E(C) &= 1 \\ 0,85 + P_E(C) &= 1 \\ 0,85 + P_E(C) - 0,85 &= 1 - 0,85 \\ P_E(C) &= 0,15 \end{aligned}$$

   Finalement

   15 % des clients ont choisi le forfait C.

2. Notons D l'ensemble des clients ayant choisi le forfait C mais qui n'ont pas choisi l'internet illimité.

   Calculons $P_E(D)$.

   Nous identifions la situation de populations emboîtées : $D \subset C \subset E$. Donc, d'après la leçon :

   $$\begin{aligned} P_E(D) &= P_E(C) \times P_C(D) \\ &= 15 \times (100 - 80) \\ &= 3 \end{aligned}$$

   3 % des clients ont un forfait C sans internet illimité.

Exercice 19. ⚽

IV Exercices.

Exercice 20.

Une entreprise est composée de trois services : Administratif, Logistique et Transport. 45 % des employés travaillent au sein du service Administratif et 23 % au sein du service Logistique. Une enquête effectuée sur le temps de trajet quotidien entre le domicile des employés et l'entreprise a montré que :

- 54, 2 % des employés résident à moins de 30 min de l'entreprise ;
- 60 % des employés du service Logistique résident à moins de 30 min de l'entreprise ;
- 9, 6 % des employés travaillent au sein du service Transport et résident à 30 min ou plus de l'entreprise.

1. Recopiez et complétez le tableau ci-dessous à l'aide des pourcentages donnés dans l'énoncé.

	Service Administratif	Service Logistique	Service Transport	Total
Résidant à moins de 30 min				
Résidant à 30 min ou plus				
Total				100

2. Détermine, au sein du service Administratif, puis au sein du service Transport, la proportion (en %) des employés qui résident à moins de 30 min de l'entreprise.
3. (a) Quel service a la plus forte proportion d'employés qui résident à moins de 30 min de l'entreprise ?

   (b) Quel service a la plus forte proportion d'employés qui résident à 30 min ou plus de l'entreprise ?

Exercice 21.

L'or pur ne peut être utilisé seul en bijouterie à cause de sa malléabilité. Il est donc mélangé à d'autres métaux, comme l'argent ou le cuivre, qui le rendent plus dur. On obtient ainsi l'or jaune (mélange d'or pur et d'argent) et l'or rose (mélange d'or pur et de cuivre).
La valeur de l'or jaune ou de l'or rose est estimée en fonction de la quantité d'or pur qu'il contient. Cette valeur est de 1 carat lorsque le lingot d'or jaune ou rose contient $\dfrac{1}{24}$ d'or pur. Par exemple, si la valeur d'un lingot d'or jaune ou rose est de 8 carats, cela signifie que ce lingot contient $\dfrac{8}{24}$ d'or pur.
Un cours récent des métaux indique :

- le gramme d'or pur : 75 F.
- le gramme d'argent : 25 F.
- le gramme de cuivre : $0,5$ F.

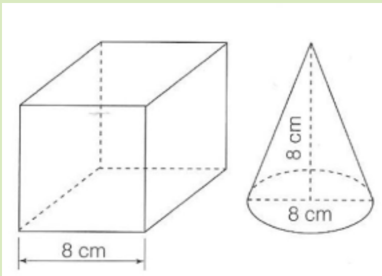
1. Le lingot d'or jaune à 18 carats pèse 50 g.
   (a) Quelle fraction d'or pur contient ce lingot d'or jaune ?
   (b) Quelle est la masse d'or pur contenu dans ce lingot ?
   (c) Quelle est la masse d'argent contenu dans ce lingot ?
   (d) Quel est le prix de ce lingot ?
2. Un autre lingot d'or jaune a une masse de 24 g.
   On désigne par x la masse (exprimée en g) d'or contenue dans ce lingot.
   (a) Montrez que le prix y (exprimé en F) de ce lingot en fonction de la masse x d'or pur qu'il contient est : $y = 50x + 600$.
   (b) Représentez graphiquement, pour x compris entre 0 et 24, l'application affine f définie par $f(x) = 50x + 600$.
   Unités :
   - sur l'axe des abscisses 1 cm pour 2 g ;
   - sur l'axe des ordonnées 1 cm pour 100 F.

Exercice 21. ✷—

3. Un lingot d'or rose a une masse de 24 g.
   On désigne par x la masse (exprimée en g) d'or pur contenue dans ce lingot.
   (a) Montrer que le prix y (exprimé en F) de ce lingot en fonction de la masse x d'or pur qu'il contient est : $y = 74,5x + 12$.
   (b) Dans le même repère que précédemment, représentez graphiquement, pour x compris entre 0 et 24, l'application affine définie par $g(x) = 74,5x + 12$.
4. Un lingot d'or jaune et un lingot d'or rose pèsent chacun 24 g.
   Utilisez le graphique précédent pour répondre aux questions suivantes.
   (a) Si ces lingots contiennent chacun 4 g d'or pur, quelle est la différence de prix entre eux ?
   (b) Si ces lingots valent 1 200 F chacun, quelle est la différence d'or pur qu'ils contiennent ?

Exercice 22.

Un cube a une arêtes de 8 cm. Un cône de révolution a une base de 8 cm de diamètre et une hauteur de 8 cm.



1. Calculez le volume du cube.
2. (a) Calculez la valeur exacte du volume du cône.
   (b) Quel est le volume du cône arrondi au cm^3 ?
3. On place le cône à l'intérieur du cube. Occupe-t-il plus de 30 % du volume du cube ? Justifiez votre réponse.

Exercice 23. ☢

Vrai ou faux ?
Armelle et Boris ne suivent pas les mêmes enseignements. La semaine 1, Armelle a réussi 50 % des exercices qu'elle a traités et Boris 90 % des exercices qu'il a traités.La semaine , Armelle a réussi 20 % des exercices qu'elle a traités et Boris 40 % des exercices qu'il a traités.
Sur l'ensemble de la quinzaine, Boris a nécessairement réussi un plus grand pourcentage d'exercices traités qu'Armelle.