Proportion-pourcentage.

I Calculer une proportion.

1 Proportion.

Une proportion est un nombre qui représente un ratio c'est-à-dire un rapport de deux grandeurs de même nature.

Proportion	Ratio	Proportionnalité
$\dfrac{2}{3}$ ou $\dfrac{4}{6}$	$2:3$ ou $4:6$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 3 & 6 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline\end{array}$

Le tableau de proportionnalité regroupe des grandeurs qui sont dans un même ratio.

La proportion est le coefficient multiplicateur qui permet de passer de la première à la deuxième ligne du tableau de proportionnalité : $\frac{2}{3} \times 6 = 4$.

Exemples.

1. « Trois élèves sur cinq choisissent la spécialité mathématiques. » Nous traduirons cela en disant que la proportion d'élèves choisissant la spécialité mathématique est $\frac{3}{5}$.
2. Dans une classe de 24 élèves il y a 2 filles. La proportion de filles dans la classe est de $p = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$.

2 Appliquer une proportion.

Appliquer une proportion c'est multiplier une grandeur par la proportion. Ainsi les deux tiers de 6 s'obtiennent en faisant : $\frac{2}{3} \times 6 = 4$.

Exemples.

1. Si un tiers des élèves d'une classe de 33 élèves font régulièrement leur travail, alors le nombre d'élèves qui travaillent régulièrement est $\frac{1}{3} \times 33 = 11$.
2. Si la proportion de mangeurs de choucroute à la Réunion est de 1 millième, alors, comme il y a 856 000 habitants à la Réunion, le nombre de mangeurs de choucroute est : $\frac{1}{1000} \times 856\,000 = 856$.

Exercice 1.

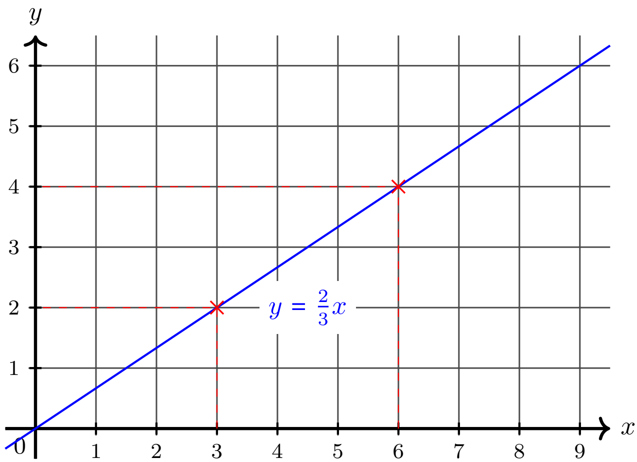
Exercices 12 et 17 page 282 du manuel Indice.

3 Représentation graphique d'une situation de proportionnalité.

Pour le tableau de proportionnalité suivant

x	3	6	9
y	2	4	6

nous pouvons considérer que la première ligne correspond à des abscisses et la seconde à des ordonnées. Les points dans le cas d'une proportionnalité sont alignés avec l'origine du repère.



Ici les abscisses et ordonnées des points de la droite sont liées par l'équation $y = \frac{2}{3}x$.

Nous dirons aussi que la droite est la courbe représentative d'une fonction linéaire dont le coefficient directeur est $\frac{2}{3}$.

II Les pourcentages.

Pour se représenter facilement les proportions il est traditionnel d'exprimer la proportion sous forme d'une fraction dont le dénominateur est 100 le numérateur est alors appelé un pourcentage.

Autrement dit un pourcentage est nombre exprimé non pas en unités mais en centièmes.

Pour obtenir un pourcentage il suffit de multiplier la proportion par 100.

L'usage du pourcentage étant socialement répandu il peut sembler plus simple de l'utiliser. Mathématiquement, le pourcentage n'a pas davantage par rapport à une fraction ou une écriture décimale.

Exemples.

1. $\frac{2}{5} = \frac{40}{100}$ donc une proportion de $\frac{2}{5}$ correspond à 40 %.
2. 34,78 % = $\frac{34{,}78}{100}$ = 0,3478.
3. Si lors d'une élection 234 citoyens sur un total de 650 votent pour le candidat Dugenou, alors $\frac{234}{650} \times 100 = 36$ donc 36 %.

III Les études de populations.

1 Pourcentage d'une sous-population dans une population.

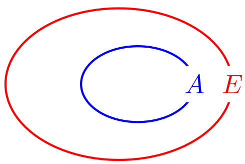
Nous allons préciser les proportions intervenant dans le domaine des statistiques.

En statistique une *population* est une ensemble de trucs (des hommes, des animaux, des objets, ...) tous de même nature et que nous souhaitons étudier."Les trucs étudiés sont appelés des individus.
Le plus souvent il s'agira de collecter des données sur un *caractère* (un aspect des individus : taille, poids, couleur, ...) des individus de la population. L'ensemble des données constituant alors une *série statistique*.

Si dans une première population de 12 individus il y a 10 filles et dans une seconde population de 24 individus il y en a 12, dans quelle population y a-t-il le plus de filles ? La question est trop imprécise et deux réponses sont possibles :
— il y a plus de fille dans la seconde population que dans la seconde,
— il y a plus de fille dans la première population par rapport au nombre d'élèves de la classe.
Dans le second cas nous comparons des proportions.

Définition 1

Soient E une population d'individus et A une sous-population de la population E.



Notons $\#(A)$ et $\#(E)$ les effectifs des populations respectivement A et E.

Nous appellerons *pourcentage de la sous-population A dans la population E*

$$p_E(A) = \frac{\#A}{\#E} \times 100.$$

Exemples.

1. Lors de tests sur un échantillon de 1240 personnes, on observe que 356 sont séro-positives. Donc la proportion, en pourcentage, de la population qui peut être estimée séro-positive est de $\frac{356}{1240} \times 100 \approx 28{,}71$ (en arrondissant au centième).
2.

Remarques.

1. On retrouve la formulation habituelle : $\frac{\text{effectif}}{\text{effectif total}} \times 100$.
2. Le pourcentage d'une sous-population dans une population est un nombre compris entre 0 et 100.
3. En statistique E est appelée la population de référence.
4. En mathématiques pures plutôt que de parler de population nous parlerons d'ensemble fini.

Exercice 2. ♥

Dans une classe de première de 35 élèves, 9 élèves font du ski.
Calculez le pourcentage, noté p, d'élèves de la classe qui font du ski arrondi à 10^{-2} près.

Correction exercice 2

Notons E l'ensemble des élèves de la classe et A l'ensemble de ceux qui font du ski.

Calculons $p_E(A)$.

Par définition

$$p_E(A) = \frac{\#A}{\#E} \times 100.$$

Or $\#A = 9$ et $\#E = 35$ donc :

$$\begin{aligned} p_E(A) &= \frac{9}{35} \times 100 \\ &\approx 25{,}71 \end{aligned}$$

25,71 % des élèves font du ski.

Exercice 3. Application.

Une salle de spectacle contient 9 000 places assises et 21 000 places debout.

1. Calculez le pourcentage de places assises.
2. Déterminez le pourcentage de places debout.

Correction exercice 3

1. Calculons la proportion, $p_E(A)$, de places assises.

   Notons A l'ensemble des places assises et E l'ensemble de toutes les places.
   Nous avons $\#A = 9000$ (le nombre de places assises) et $\#E = 9000 + 21000 = 30000$ (le nombre total, assis ou debout, de places).
   Donc le pourcentage de places assises est :

$$\begin{aligned} p_E(A) &= \frac{\#A}{\#E} \times 100 \\ &= \frac{9000}{30000} \times 100 \\ &= 30 \end{aligned}$$

   30 % des places sont des places assises.

2. Calculons la proportion, $p_E(B)$, de places debout.

   Notons B l'ensemble des places debout.
   Nous avons $\#B = 21000$.

   Le pourcentage de places debout est :

$$\begin{aligned} p_E(B) &= \frac{\#B}{\#E} \times 100 \\ &= \frac{21000}{30000} \times 100 \\ &= 70 \end{aligned}$$

   70 % des places sont des places debout.

2 Divers calculs avec les pourcentages d'une sous-population dans une population.

Exercice 4. Application.

1. Dans un petit port, les cinq-sixièmes des 720 habitants vivent de la pêche. Combien d'habitants vivent de la pêche ?
2. Dans un village voisin, 697 habitants vivent de l'agriculture, ce qui représente 82% de la population. Combien y a-t-il d'habitants dans ce village ?

Correction exercice 4

1. Il s'agit d'appliquer une proportion.

   Calculons le nombre d'habitants n qui vivent de la pêche.

$$n = 720 \times \frac{5}{6}$$

$$\boxed{n = 600.}$$

2. Notons A l'ensemble des habitants vivant de l'agriculture et E celui des habitant du village.
   Calculons $\#E$.

$$p_E(A) = \frac{\#A}{\#E} \times 100$$

   Nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned}
p_E(A) \times \#E &= \frac{\#A}{\#E} \times 100 \times \#E \\
p_E(A) \cdot \#E &= \#A \times 100 \\
\frac{p_E(A) \cdot \#E}{p_E(A)} &= \frac{\#A \times 100}{p_E(A)}, \text{ car } p_E(A) > 0 \\
\#E &= \frac{\#A \times 100}{p_E(A)} \\
&= \frac{697 \times 100}{82} \\
&\approx 163\,085
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Il y a } 163\,085 \text{ candidats à l'examen du bac.}}$$

Exercice 5. Application.

1. Une année le taux de réussite au baccalauréat technologique est de 79,7 %, ce qui représente 129 979 candidats reçus.
   Calculez le nombre de candidats à cet examen.
2. Dans un lycée le taux de réussite est de 95 %, et il y a eu 12 refusés.
   Calculez le nombre de candidats dans ce lycée.

Correction exercice 5

1. Notons : A l'ensemble des candidats reçus et E celui de tous le candidats.

   Calculons $|E|$.

$$p_E(A) = \frac{|A|}{|E|}$$

   équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 0{,}797 &= \frac{129979}{|E|} \\ 0{,}797|E| &= 129979 \\ |E| &= \frac{129979}{0{,}797} \end{aligned}$$

   $|E| \approx 163085.$

2. Notons : A l'ensemble des lycéens recalés et E celui des candidats à l'examen.
   Calculons $\#E$.

$$p_E(A) = \frac{\#A}{\#E} \times 100$$

   Nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned} 5 &= \frac{12}{\#E} \times 100, \quad \text{car } 100 - 95 = 5 \\ 5 \times \#E &= 12 \times 100 \\ \#E &= \frac{12 \times 100}{5} \\ \#E &= 240 \end{aligned}$$

   Il y a 240 candidats dans ce lycée.

Exercice 6. Application.
Le salaire brut mensuel de Sophie est de 13 200 €. Les cotisations salariales représentent 23 % du salaire brut.
Calculez le salaire hors cotisations salariales.

Correction exercice 6

Nous allons ici raisonner comme pour des populations ce qui en fait pas le cas.

Notons : $\#A$ le salaire hors cotisation salariale, $p_E(A) = 100 - 23$ et $\#E = 13200$ le salaire brut.

Déterminons $\#A$.

$$p_E(A) = \frac{\#A}{\#E}$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 0{,}77 &= \frac{\#A}{13200} \\ 0{,}77 \times 13200 &= \#A \\ 10164 &= \#A \end{aligned}$$

Le salaire hors cotisation salariales est de 10 164 €.

Exercice 7.

Exercices 35 à 47 page 284 du manuel Indice.

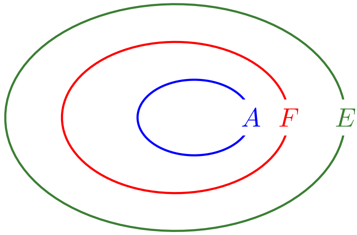
Correction exercice 7

- 41 page 284. 375.
- 42 page 284

3 Pourcentage de pourcentage.

Proposition 1

Soient E une population d'individus, F une sous-population de E et A une sous-population de F.



$$p_E(A) = \frac{p_E(F) \times p_F(A)}{100}.$$

Démonstration 1

Par définition : $p_E(F) = \frac{\#F}{\#E} \times 100$ et $p_F(A) = \frac{\#A}{\#F}$.

Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{p_E(F) \times p_F(A)}{100} &= \frac{\frac{\#F}{\#E} \times 100 \times \frac{\#A}{\#F} \times 100}{100} \\
&= \frac{\#F \times \#A}{\#E \times \#F} \times 100 \\
&= \frac{\#A}{\#E} \\
&= p_E(A)
\end{aligned}$$

Remarques.

1. Le pourcentage de la sous-population A dans la population E est le produit des pourcentages de la sous-population A dans la sous -population F par le pourcentage de la sous-population F dans la population E.
2. Cette proposition peut être vue comme l'application d'une proportion ($\frac{p_F(A)}{100}$) à un pourcentage ($p_E(F)$).
3. Les pourcentages-proportions fonctionnent de façon multiplicative. Vous retrouverez cette idée en classe de première en parlant de *principe multiplicatif.*
4. Dans cette proposition il y a deux populations de références : E et F.
5. Ce résultat n'utilise pas les effectifs des populations mais seulement les pourcentages. Ces dans ce cas très particulier que nous les utiliserons en exercices.

Exercice 8. ♥

Un serveur de films en streaming est composé de 30 % de films d'action et, parmi ces films d'action, 60 % sont des films avec Bruce Willis.
Quelle est la proportion de films avec Bruce Willis sur le serveur ?

Correction exercice 8

Notons E l'ensemble des films proposé, F l'ensemble des films d'actions et A l'ensemble des films avec Bruce Willis.

Nous avons bien la situation des inclusions successives : A est une sous-population de F qui est elle-même une sous-population de E.

Calculons $p_E(A)$.

Nous savons que $p_E(F) = 30$ et $p_F(A) = 60$ donc

$$\begin{aligned} p_E(A) &= \frac{p_E(F) \times p_F(A)}{100} \\ &= \frac{30 \times 60}{100} \\ &= 18 \end{aligned}$$

18 % des films du serveur sont des films de Bruce Willis.

Exercice 9. Application.

Dans une classe 45 % des élèves sont des garçons et 30 % des garçons portent des lunettes.
Il y a 3 garçons à lunettes dans la classe.

1. Combien y a-t-il d'élèves dans cette classe ?
2. Combien y a-t-il de filles dans cette classe ?

Correction exercice 9

Notons E l'ensemble des élèves, F l'ensemble des garçons et A l'ensemble des garçons à lunettes.

1. Calculons $\#E$.

   D'après l'énoncé $p_F(A) = \frac{1}{3} \times 100$ et $p_E(F) = 45$ donc le pourcentage de garçons à lunettes dans la classe est

$$\begin{aligned} p_E(A) &= \frac{p_E(F) \times p_F(A)}{100} \\ &= \frac{45 \times \frac{100}{3}}{100} \\ &= 15 \end{aligned}$$

Mais on peut aussi écrire que :

$$p_E(A) = \frac{\#A}{\#E} \times 100$$

Nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned}
15 &= \frac{3}{\#E} \times 100 \\
15 \times \#E &= \frac{3}{\#E} \times 100 \times \#E \\
15 \times \#E &= 3 \\
\frac{0{,}15\#E}{15} &= \frac{3}{15} \\
\#E &= 20
\end{aligned}$$

Il y a vingt élèves dans la classe.

2. Notons G l'ensemble ds filles de la classe.

   Calculons le nombre, $|G|$, de filles dans la classe.

   Il s'agit simplement de calculer un pourcentage d'une quantité, c'est-à-dire d'appliquer une proportion.
   Le nombre de garçons dans la classe est :

$$\begin{aligned}
\#F &= \frac{p_E(F)}{100} \times \#E \\
&= \frac{45}{100} \times 20 \\
&= 9
\end{aligned}$$

   Donc : $\#G = 20 - 9$.

Il y a 11 filles dans la classe.

Exercice 10. Application.
Dans une société les cadres représentent 40 % des salariés et les cadres supérieurs représentent un 20 % des cadres.
Quelle est la proportion de cadres supérieurs par rapport aux salariés de cette société ?

Correction exercice 10

Notons E l'ensemble des salariés, F l'ensemble des cadres et A l'ensemble des cadres supérieurs.

Nous avons bien la situation des inclusions successives : $A \subset F \subset E$.

Calculons $p_E(A)$.

Nous savons que $p_E(F) = 0{,}4$ et $p_F(A) = \frac{1}{5}$ donc

$$\begin{aligned} p_E(A) &= p_E(F) \times p_F(A) \\ &= 0{,}4 \times \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\boxed{p_E(A) = 0{,}08.}$$

Exercice 11. Application.

Une société de téléphonie propose trois mode d'abonnement différents :

- forfait A : moins de 2 h de communication ;
- forfait B : moins de 4 h de communication ;
- forfait C : temps de communication illimité.

La part de clients ayant souscrit le forfait A est de 0,35 et les clients ayant choisi le forfait B représentent la moitié de la clientèle.
De plus 80 % des clients ayant choisi le forfait C ont également choisi l'internet illimité.

1. Quelle est la part de clients ayant choisi le forfait illimité ? Exprimez ce résultat en pourcentage.
2. Quelle est la part des clients qui ont choisi un forfait C mais sans l'internet illimité.

Correction exercice 11

1. Notons E l'ensemble de tous les clients.

   Calculons $p_E(C)$.

   Nous savons que
   $$p_E(A) + p_E(B) + p_E(C) = 1. \quad (1)$$

   En exprimant les proportions en pourcentages nous aurions que les total doit être de 100 % $= \frac{100}{100} = 1$.
   (1) est successivement équivalente à

$$\begin{aligned} 0{,}35 + \frac{1}{2} + p_E(C) &= 1 \\ 0{,}85 + p_E(C) &= 1 \\ 0{,}85 + p_E(C) - 0{,}85 &= 1 - 0{,}85 \\ p_E(C) &= 0{,}15 \end{aligned}$$

Finalement

15 % des clients ont choisi le forfait C.

2. Notons D l'ensemble des clients ayant choisi le forfait C mais qui n'ont pas choisi l'internet illimité.

   Calculons $p_E(D)$.

   Nous identifions la situation de populations emboîtées : $D \subset C \subset E$. Donc, d'après la leçon :

$$\begin{aligned} p_E(D) &= \frac{p_E(C) \times p_C(D)}{100} \\ &= \frac{15 \times (100 - 80)}{100} \\ &= 3 \end{aligned}$$

3 % des clients ont un forfait C sans internet illimité.

Exercice 12.

Exercices 18 à 21 page 282 du manuel Indice.

Exercice 13.

Exercices 48 à 56 page 285 du manuel Indice.

IV Exercices.

Exercice 14. Concours.

Le tableau incomplet, en question 1.(b), donne le nombre de salariés en France, en milliers, selon la catégorie et le type de contrôle de l'entreprise en 2015.

On peut traiter les questions 1. et 2. de façon indépendante.

1. (a) En 2015, 66,8 % des salariés des ETI (entreprises de taille intermédiaire) font partie d'un groupe français.
   Calculer le nombre de salariés des ETI de groupes français.

   (b) Compléter le tableau donné ci-dessous en arrondissant les résultats au millier près.

	Unités légales hors groupes	Groupes français	Sous contrôle d'un groupe étranger	Total
Grandes entreprises (GE)	0			4 235
Entreprises de taille intermédiaire (ETI)	154			3 657
Petites et moyennes entreprises (PME) hors microentreprises	1 669	2 255	335	4 259
Microentreprises (MIC)	2 549	177	20	2 745
Total	4 373	8 477	2 047	14 897

2. Nous noterons F l'ensemble des salariés faisant partie d'un groupe français, M l'ensemble des salariés faisant partie d'une PME et E l'ensemble de tous les salariés. Dans cette question, les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-2}.

   (a) Calculer la proportion, $p_E(F)$, de salariés d'un groupe français parmi les salariés et $p_F(M)$ la proportion de salariés travaillant en PME parmi les salariés français.

   (b) Exprimer $\dfrac{2255}{14897}$ en pourcentage et interpréter, dans le contexte de l'exercice, cette proportion.

   (c) Calculer $p_M(F)$ et interpréter, dans le contexte de l'exercice, cette proportion.

Correction exercice 14

1. (a) Notons E_1 l'ensemble des salariés des ETI et A_1 l'ensemble des salariés des ETI appartenant à des groupes français.

Déterminons $|A_1|$.

$$\begin{aligned}|A_1| &= p_{E_1}(A_1) \times |E_1| \\ &= \frac{66{,}8}{100} \times 3657 \\ &= 2442{,}876\end{aligned}$$

Les ETI comptent 2 442 876 salariés.

(b)

	Unités légales hors groupes	Groupes français	Sous contrôle d'un groupe étranger	Total
(GE)	0	3 602	632	4 235
(ETI)	154	2 443	1 060	3 657
(PME)	1 669	2 255	335	4 259
(MIC)	2 549	177	20	2 745
Total	4 373	8 477	2 047	14 897

2. (a)