Dichotomie.

Un jeu.

Règles du jeu.

On demande à l'utilisateur de deviner en moins de six essais un nombre tiré au hasard entre 10 et 100.

On lui indique à chaque fois si le nombre qu'il a proposé est supérieur, inférieur ou égale au nombre cherché.

EXERCICE 1. Proposez un fonction Python qui simule le joueur qui choisi le nombre dans le précédent jeu.

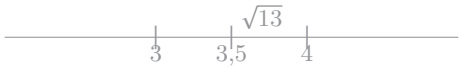
Dichotomie.

De façon générale lorsqu'un raisonnement ou un algorithme sépare un ensemble en deux parties nous parlerons d'un procédé de *dichotomie*. Le mot dichotomie vient du grec dikhotomos qui signifie couper en deux. L'étymologie du mot contient à elle seule tout le principe de cette méthode.

On se propose de rechercher une valeur approchée de $\sqrt{13}$ (car nous ne pouvons pas donner d'écriture décimale exacte). Nous aurons besoin d'un résultat essentiel (croissance de la fonction racine carrée : si $a^2 \leqslant 13 \leqslant b^2$ alors $a \leqslant \sqrt{13} \leqslant b$.

1. Première étape.
   Choisissons $a_1 = 3$ et $b_1 = 4$. l'inégalité $3^2 \leqslant 13 \leqslant 4^2$ prouve que $3 \leqslant \sqrt{13} \leqslant 4$. L'intervalle dans lequel nous allons chercher $\sqrt{13}$ est donc $[3;4]$.

2. Deuxième étape.
   Considérons maintenant x le centre de $[3;4]$ (donc $x = 3{,}5$). On veut savoir si $\sqrt{13}$ appartient à $[a_1,x]$ ou bien s'il appartient à $[x,a_2]$. Pour cela on calcul x^2 : $x^2 = 3{,}5^2 = 12{,}25$.
   Or $12{,}25 \leqslant 13 \leqslant 4^2$ donc $3{,}5 \leqslant \sqrt{13} \leqslant 4$. Nous avons donc réduit de moitié la taille de l'intervalle dans lequel se fait la recherche de $\sqrt{13}$. Celui-ci est maintenant égale à $[3{,}5;4]$.



   Posons $a_2 = 3{,}5$ et $b_2 = 4$. Nous pouvons recommencer le procédé à partir de ce nouvel intervalle. À chaque nouvelle étape on compare $\sqrt{13}$ et le milieu x de l'intervalle de recherche ou, plus précisément, x^2 et 13. Puis on procède de même qu'à l'étape deux.

EXERCICE 2. On reprend l'algorithme décrit ci-dessus.

1. À chaque étape, on note $[a,b]$ l'intervalle dans lequel on cherche $\sqrt{13}$ et x son milieu $\left(x = \frac{a+b}{2}\right)$. l'amplitude cet intervalle est $(b-a)$.
   (a) Complétez le tableau suivant.

étape	a	b	a^2	b^2	encadrement	amplitude de l'intervalle	$x = \frac{a+b}{2}$	x^2	comparaison de x et $\sqrt{13}$
1	3	4	9	16	$3 \leqslant x \leqslant 4$	1	3,5	12,25	$x \leqslant \sqrt{13}$
2	3,4	4	12,25	16	$3{,}5 \leqslant \sqrt{13} \leqslant 4$	0,5			
3									
4									
5									
6									

(b) Donnez à partir de ce tableau un encadrement de $\sqrt{13}$ d'amplitude 5×10^{-2}.

2. À chaque étape l'amplitude est divisée par deux.

   (a) Quelle est l'amplitude à la sixième étape ? à la n-ième ?

   (b) Combien d'étapes sont-elles nécessaires pour que cette amplitude soit inférieure à 10^{-3}.

EXERCICE 3. On souhaite programmer en Python l'algorithme de l'exercice précédent.

```
def dichotomie(a,b,amplitude):
    while b-a>amplitude:
        centre= ...
        if ...:
            a=centre
        else:
            b=centre
    return [a,b]
```

1. Donnez : le nom de la fonction, les noms de ses argument, les noms des autres variables du programme.
2. Que renvoie ce programme ?
3. Quel est le booléen du test d'arrêt de la boucle while ?
4. Complétez le programme ci-dessus.

Algorithme de bissection.

L'*algorithme de bissection* est un algorithme de dichotomie qui permet de trouver une valeur approchée du zéro d'une fonction (valeur de x qui annule la fonction) lorsque la fonction est continue (c'est-à-dire que son graphe est d'un seul tenant, d'un seul trait).

Voici un exemple de recherche d'un tel zéro : en ligne ou fichier geogebra.

Exercices.

EXERCICE 4. On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10; 10]$. On admet que la fonction f est continue, *i.e.* que le graphe de f peut être dessiné d'un seul trait.

x	-10		-5		3		10
$f(x)$	-260	$\nearrow$	165	$\searrow$	-91	$\nearrow$	840

1. Combien l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle de solutions ?
2. Déterminez, suivant la valeur de $k \in \mathbb{R}$, le nombre de solution de l'équation $f(x) = k$.
3. L'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[-5; 3]$. Lequel de ces deux algorithmes permet de trouver une valeur approchée de cette solution ? Justifiez.

Programme 1

```
Entrée
    | Affecter −5 à A
    | Affecter 3 à B

Traitement
    | Tant que B − A > 0,01 faire
    |     | Si f((A+B)/2) < 0 alors
    |     |     | Affecter (A+B)/2 à A
    |     |     | Sinon
    |     |     | Affecter (A+B)/2 à B
    |     | FinSi
    | Fin Tant que

Sortie
    | Afficher (A+B)/2
```

Programme 2

```
Entrée
    | Affecter −5 à A
    | Affecter 3 à B

Traitement
    | Tant que B − A > 0,01 faire
    |     | Si f((A+B)/2) < 0 alors
    |     |     | Affecter (A+B)/2 à B
    |     |     | Sinon
    |     |     | Affecter (A+B)/2 à A
    |     | FinSi
    | Fin Tant que

Sortie
    | Afficher (A+B)/2
```

EXERCICE 5.

Pierre place la somme de 5 000 € sur un compte épargne rémunéré à 2 % par an. Chaque année, les intérêts s'ajoutent à son capital. Il compte aussi placer 200 € de plus par an. Il souhaite savoir au bout de combien d'années son épargne dépassera 10 000 €.

1. Complétez le tableau.

Année 0	Année 1	Année 2	Année 3
5 000 €	5 300 €		

2. On note S la fonction qui à n, entier naturel, associe le montant de l'épargne au bout de n années ($n \neq 0$).
   Chloé conjecture que l'expression de S est

$$S(n) = n \times 5000 \times 1{,}02 + n \times 200$$

   Est-ce la bonne expression de S ? Justifiez votre réponse.
3. Pierre décide de trouver la solution à l'aide d'un algorithme.
   Aidez le en complétant l'algorithme suivant.

```python
def attente(objectif):
 capital=5000
 annee=1
 while capital<=objectif:
  capital=...
  annee=annee+1
 return(annee)
```

EXERCICE 6.

Un prince indien très riche demanda à ses sages de lui inventer un divertissement. Quelque temps plus tard, le brahmane Sissa lui apporta un nouveau jeu : les échecs.

Ce jeu passionna le prince, il y joua des journées entières. Pour remercier Sissa, il lui promit une récompense de son choix.

Le brahmane demanda la quantité de grains de blé nécessaire pour remplir l'échiquier de la façon suivante :

— on place un grain sur la première case,
— deux grains sur la seconde,
— quatre sur la troisième,
— huit sur la quatrième,
— ...

en doublant le nombre de grains jusqu'à la soixante-quatrième case de l'échiquier.

Le prince trouva cette demande bien modeste. Est-ce le cas ?

EXERCICE 7.

Olympiade 2017 exercice Marseille.