Approximer un réel par balayage.

I Distance entre nombres.

Valeur absolue.

Définition 1

Soit x un réel.

Nous appellerons *valeur absolue de* x et nous noterons $|x|$ le réel définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemples.

1. $|2| = 2$.
2. $|-2| = 2$.
3. $|0| = 0$.
4. $|3-4| = 1$.

Remarques.

1. Une valeur approchée d'une nombre est un nombre positif.
2. La valeur absolue est un outil commode pour noter la longueur séparant deux points de la droite numérique :

   Ici : $AB = |-1-3| = 4$.
3. La valeur absolue permet de calculer la distance entre les nombres : $d(2;7) = |2-7| = 5$.
4. La valeur absolue coïncide avec la distance euclidienne sur l'axe des abscisses : Si $A(2;0)$ et $B(7;0)$ alors $AB = \sqrt{(2-7)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{25} = 5 = |2-7|$.

Exercice 1.

Exercices 154 et 155 page 71.

Les approximations de réels.

Les seuls nombres dont nous puissions donner une écriture décimale facilement sont précisément les nombres décimaux. Et encore. Songez à un nombre décimal ayant un million de chiffres non nuls après la virgule. Il est malaisé de l'écrire.

Pour les nombres rationnels nous (mathématiciens) préférons souvent l'écriture en fraction irréductible.

Pour les nombres irrationnels nous avons des notations qui nous dispensent d'essayer d'écrire les nombres : π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, ...

Tout cela satisfait les mathématiciens mais pas les ingénieurs, les physiciens, chimistes, statisticiens et autres utilisateurs de l'outil mathématique.

Il faut être capable de donner *une valeur approché*, donc un nombre décimal, de tous ces nombres rationnels ou irrationnels

La recherche d'une valeur approchée d'un nombre est contraire au désir de vérité absolue propre aux mathématiques. C'est pourquoi si nous acceptons, contraints et forcés, de ne pas avoir des valeurs exactes il faut que du moins nous limitions notre erreur.

Valeur approchée.

14 est une valeur approchée de 20 000 000 mais c'est sans intérêt tant cette approximation est grossière. Nous voyons bien sur cet exemple qu'il est vain de parler de valeur approchée si nous ne sommes pas capable de limiter, de quantifier, l'erreur commise.

Nous ne pouvons pas donner exactement l'erreur commise car, sinon, nous connaîtrions la valeur exacte. Nous indiquons l'erreur maximale que nous commettons sous forme d'écart, de distance maximale, entre notre valeur approchée et la valeur exacte.

Pour parler de la distance entre les nombres nous utiliserons donc la valeur absolue.

Définition 2

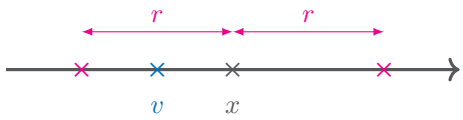
Soient $x \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $v \in \mathbb{D}$.

Nous dirons qu'un nombre décimal v est *une valeur approchée d'un nombre x à r près* si la distance entre v et x est inférieure à r. Autrement dit si :

$$|x - v| \leqslant r.$$

Remarques.

1. Pour se représenter la situation nous raisonnons géométriquement :



2. Nous voyons clairement sur le précédent schéma que $v \in [x-r; x+r]$. r peut être appelé le *rayon de l'intervalle* (par analogie avec le disque) et $2r$ est alors le diamètre ou l'*amplitude* de l'intervalle.
3. Si la valeur approchée v est inférieure à la valeur exacte x nous dirons que v est *une valeur approchée par défaut*.
   De même si $x \leqslant v$ nous dirons que v est *une valeur approchée par excès*.
4. Un procédé simple pour obtenir une valeur approchée à 10^{-n}, avec $n \in \mathbb{N}$, consiste à arrêter son écriture décimale au n-ième chiffre après la virgule. Ce procédé est appelé *troncature*. Tronquer 1,23456 à 10^{-4} donne 1,2345. Tronquer $-1{,}23456$ à 10^{-3} donne $-1{,}234$.

Exemples.

1. Valeurs approchées de 3 à 10 près.
2. Valeurs approchées de 12,6 à 0,1 près.
3. Valeurs approchées de $-0{,}5$ à 1 près.
4. Puisque $1{,}9 \in [2-0{,}5; 2+0;5]$ nous pouvons dire que 1,9 est une valeur approchée de 2 à 0,5 près.

Exercice 2.

Exercice 3.

Exercices 146 à 153 page 71 du manuel Indice.

Définition 3

Soient $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{D}$.

Nous dirons que v est *une valeur arrondie de v à 10^n près* si v est une valeur approchée de x à $\frac{1}{2} \times 10^n$ près et si $v \times 10^{-n}$ est un entier.

II Approximation de $\frac{1}{3}$.

III Approximation de $\sqrt{2}$.

La *méthode de recherche par balayage* consiste à chercher une solution dans un intervalle en testant les valeurs les unes à la suite des autres. Si la méthode ne donne pas exactement la réponse il faut recommencer mais sur un intervalle de plus petite amplitude.

Exercice 4.

Notre objectif est d'obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$. Rappelons que $\sqrt{2}$ est, par définition, l'unique nombre positif tel que $\sqrt{2}^2 = 2$.

1. Nous savons que la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquents images et antécédents sont rangés dans le même ordre.

   (a) Recopiez et complétez le tableau de valeur suivant :

x	0	1	2
x^2			

   (b) Déduisez-en des valeurs approchées par excès et par défaut de $\sqrt{2}$ à 1 près.

2. En complétant le tableau de valeurs suivant, déduisez-en un des valeurs approchées par défaut et par excès de $\sqrt{2}$ à 10^{-1} près.

x	0	0,1	0,2	...
x^2				

3. Le programme suivant écrit en Python permet d'obtenir un encadrement de $\sqrt{2}$ avec une amplitude de 0,001 à l'aide d'un algorithme par balayage :

```
valeur=1
pas=0.001
while valeur*valeur<2:
  valeur=valeur+pas
print(valeur-pas,"<sqrt(2)<",valeur)
```

   (a) Exécutez le programme. En quoi les valeurs renvoyées sont-elles surprenantes ? Comment pouvez-vous les expliquer ?

   (b) Modifiez le programme afin d'obtenir un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude un millionième. Que se passe-t-il pour un encadrement d'amplitude un dix-millionième ?

   (c) Modifiez le programme en créant une variable compteur qui va être incrémentée à chaque passage dans la boucle `while`.

   (d) Vérifiez que pour un encadrement d'amplitude 0,0001 il faut 4 143 itérations et que pour un encadrement d'amplitude au dix-millionième il en faut 4 142 136.

Exercice 4. Suite.

4. Un élève décide d'améliorer le programme de la façon suivante : pour obtenir un encadrement au dix-millionième de $\sqrt{2}$, il lance le programme avec `valeur=1` et `pas=0.1`.

   Puis il le relance avec pour `valeur` la borne inférieure de l'encadrement qu'elle vient d'obtenir, en initialisant `pas` à `0.01`.

   Puis elle réitère ce procédé jusqu'à un pas de 0,000 000 001

   (a) Testez sa méthode et donnez un encadrement de $\sqrt{2}$ au milliardième.

   (b) Vérifiez que cette méthode nécessite moins de 70 passages dans la boucle `while`, et donnez le nombre exacte de passages.

Correction exercice 4

1. (a) Évidemment :

x	0	1	2
x^2	0	1	4

   (b) Pour que $x^2 = 2$ il faudra choisir x entre 1 et 2.

   1 (respectivement 2) est un valeur approchée par défaut (resp. excès) de $\sqrt{2}$ à 1 près.

2. Comme précédemment :

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
x^2	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25

   1,4 (respectivement 1,5) est un valeur approchée par défaut (resp. excès) de $\sqrt{2}$ à 0,1 près.

3. (a) L'encadrement obtenu n'est pas correcte mathématiquement. Cela s'explique par le fait que dans ce cas Python travail avec des valeurs approchées.

   (b) Les deux valeurs approchées par excès et défauts sont confondus. Nous somme delà de la capacité de précision de Python.

   (c)

```
valeur=1
pas=0.0001
compteur=0
while valeur*valeur<2:
  valeur=valeur+pas
  compteur=compteur+1
print(valeur-pas,"<sqrt(2)<",valeur)
print(compteur)
```

(d)

4.

Exercice 5.

Exercice 210 page 78 du manuel Indice.