Diviseurs et multiples.

I Division euclidienne.

Définition 1

Soient a et b des nombres entiers naturels (donc choisis dans $\mathbb{N}$) avec $b \neq 0$.

Effectuer la division euclidienne de a par b, c'est trouver le nombre *quotient* q (dans $\mathbb{Z}$) et le *reste* r (dans $\mathbb{N}$) tels que

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leqslant r < b \end{cases}$$

Exemples.

1. Division euclidienne de 652 par 24

   Opération posée (potence).

$$\begin{array}{r|l} 652 & 24 \\ \hline -48 & 27 \\ 172 & \\ -168 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

Division euclidienne.

$$\begin{cases} 652 = 24 \times 27 + 4 \\ 0 \leqslant 4 < 24 \end{cases}$$

2. Division euclidienne de 237 par 12

$$\begin{array}{r|l} 237 & 12 \\ \hline -12 & 19 \\ 117 & \\ -108 & \\ \hline 9 & \end{array}$$

$$\begin{cases} 237 = 12 \times 19 + 9 \\ 0 \leqslant 9 < 12 \end{cases}$$

Remarques.

1. Cette définition peut se généraliser au cas d'entiers relatifs. Il est aussi possible de procéder à la division euclidienne de $x^2 - 2x + 1$ par $x - 1$, mais ce n'est pas au programme.
2. a est appelé le *dividende* et b le *diviseur*.
3. Avec Python 3 le quotient (au sens de la division euclidienne) de 17 et 3 s'obtient avec l'instruction

```
17//3
```

et le reste s'obtient en faisant

```
17%3
```

Exercice 1.

Procédez à la division euclidienne de

1. 356 par 5,
2. 827 par 30,
3. 232 par 7,
4. 1204 par 13,
5. 324 par 2.
6. 17 par 170,
7. 121 par 11,
8. 625 par 25,
9. 97 par 7,
10. 244 par 3.

Correction exercice 1

1.

$$\begin{array}{rrrr|ll} & 3 & 5 & 6 & 5 & \\ \cline{5-6} - & 3 & 5 & & 7 & 1 \\ \cline{2-3} & & 0 & 6 & & \\ & - & & 5 & & \\ \cline{3-4} & & & 1 & & \end{array}$$

$$\begin{cases} 356 = 5 \times 71 + 1 \\ 0 \leqslant 1 < 5 \end{cases}$$

2.

$$\begin{array}{rrrr|ll} & 8 & 2 & 7 & 3 & 0 \\ \cline{5-6} - & 6 & 0 & & 2 & 7 \\ \cline{2-3} & 2 & 2 & 7 & & \\ - & 2 & 1 & 0 & & \\ \cline{2-4} & & 1 & 7 & & \end{array}$$

$$\begin{cases} 827 = 30 \times 27 + 17 \\ 0 \leqslant 17 < 30 \end{cases}$$

3.

$$\begin{array}{rrrr|ll} & 2 & 3 & 2 & 7 & \\ \cline{5-6} - & 2 & 1 & & 3 & 3 \\ \cline{2-3} & & 2 & 2 & & \\ & - & 2 & 1 & & \\ \cline{3-4} & & & 1 & & \end{array}$$

$$\begin{cases} 232 = 7 \times 33 + 1 \\ 0 \leqslant 1 < 33 \end{cases}$$

4.

$$\begin{array}{r|l} 1204 & 13 \\ \cline{2-2} -117 & 92 \\ \cline{1-1} 34 & \\ -26 & \\ \cline{1-1} 8 & \end{array}$$

$$\begin{cases} 1204 = 13 \times 92 + 8 \\ 0 \leqslant 8 < 13 \end{cases}$$

5.

$$\begin{array}{r|l} 324 & 2 \\ \cline{2-2} -2 & 162 \\ \cline{1-1} 12 & \\ -12 & \\ \cline{1-1} 04 & \\ -4 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$\begin{cases} 324 = 2 \times 162 + 0 \\ 0 \leqslant 0 < 2 \end{cases}$$

6.

$$\begin{array}{r|l} 17 & 170 \\ \cline{2-2} -0 & 0 \\ \cline{1-1} 17 & \end{array}$$

$$\begin{cases} 17 = 170 \times 0 + 17 \\ 0 \leqslant 17 < 170 \end{cases}$$

7.

$$\begin{array}{r|l} 121 & 11 \\ \cline{2-2} -11 & 11 \\ \cline{1-1} 11 & \\ -11 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$\begin{cases} 121 = 11 \times 11 + 0 \\ 0 \leqslant 0 < 11 \end{cases}$$

8.

$$\begin{array}{r|l} 625 & 25 \\ \cline{2-2} -50 & 25 \\ \cline{1-1} 125 & \\ -125 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$\begin{cases} 625 = 25 \times 25 + 0 \\ 0 \leqslant 0 < 25 \end{cases}$$

9.

$$\begin{array}{r|l} 97 & 7 \\ \cline{2-2} -7 & 13 \\ \cline{1-1} 27 & \\ -21 & \\ \cline{1-1} 6 & \end{array}$$

$$\begin{cases} 97 = 7 \times 13 + 6 \\ 0 \leqslant 6 < 7 \end{cases}$$

10.

$$\begin{array}{r|l} 244 & 3 \\ \cline{2-2} -\ 24 & 81 \\ \cline{1-1} 04 & \\ -\ 3 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

$$\begin{cases} 244 = 3 \times 81 + 1 \\ 0 \leqslant 1 < 3 \end{cases}$$

II Diviseur et multiple.

Définition.

Définition 2

Soient a et b des nombres entiers naturels (donc choisis dans $\mathbb{N}$) avec $b \neq 0$.

Nous dirons que *b est un diviseur de a* lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est zéro.

Autrement dit b est un diviseur de a s'il est possible de trouver un nombre entier naturel q tel que $a = b \times q$.

Remarques.

1. Dans les exercices nous utiliserons très souvent la deuxième interprétation du diviseur.
2. Si b est un diviseur de a alors nous dirons que *a est un multiple de b*. Autrement dit a est le résultat d'une multiplication par b.
3. Un nombre *pair* est un nombre entier multiple de 2. Autrement dit un nombre est pair s'il est divisible par 2. Un entier qui n'est pas pair est dit *impair*.

Exemples.

1. 12 n'est pas un diviseur de 237 puisque le reste de la division euclidienne de 237 par 2 n'est pas nul (c'est 9).
2. 3 est un diviseur de 21 puisque $21 = 3 \times 7$ (et 7 est bien un entier).
3. 2,5 n'est pas un diviseur de 5 bien que $5 = 2{,}5 \times 2$ car 2,5 n'est pas un entier.
4. Multiples de 3 : 0, 3, 6, 9, … (table de multiplication par 3).
5. 12 est un nombre pair puisque $12 = 2 \times 6$.
6. 13 n'est pas un nombre pair puisque le reste de la division euclidienne de 13 par 2 n'est pas 1 : $13 = 2 \times 6 + 1$.
7. 6,2 n'est pas pair puisque ce n'est pas même un nombre entier.

Déterminer des diviseurs simples d'un entier.

Rappels : critères de divisibilité.

divisible par	critère
2	le chiffre des unités est parmi 0, 2, 4, 6 et 8.
3	la somme des chiffres du nombre est divisible par 3.
5	le chiffre des unités est 0 ou 5.
9	la somme des chiffres du nombre est divisible par 9.
10	le chiffre des unités est 0.

Exemple.
Les diviseurs de 660 parmi 2, 3, 4, 5, 6 et 9 sont : 2, 3, 4, 5 et 6.
En effet :
660 est divisible par 2 puisqu'il se termine par 0.
660 est divisible par 3 car la somme de ses chiffres l'est : $6 + 6 + 0 = 12$.
660 est divisible par 2 et $660 = 330$ or 330 aussi divisible par 2. Finalement 660 est divisible par 4.
660 est divisible par 5 puisqu'il se termine par 0.
660 est divisible par 6 puisqu'il est divisible par 2 et par 3 et donc par $2\times 3 = 6$.
660 n'est pas divisible par 9 car si $660 = 3 \times 220$, 220 n'est pas divisible par 3.

Exercice 2.
Déterminez les diviseurs parmi 2, 3, 4, 5, 6 et 10 des nombres suivants.

1. 204,
2. 855,
3. 168,
4. 264,
5. 90,
6. 189,
7. 332,
8. 84,
9. 306,
10. 165.

Correction exercice 2

1. 2, 3, 4, 6
2. 3, 5.
3. 23, 4, 6
4. 23, 4, 6
5. 2, 3, 5, 6, 10.
6. 3,
7. 2, 4,
8. 2, 3, 4, 6,
9. 2, 3, 6,
10. 3, 5.

Exercice 3.
Créez une fonction Python qui, à partir de deux entiers naturels a et n, renvoie la liste des n premiers multiples de a.

Exercice 4.
Créez une fonction Python qui, à partir de deux entiers a et b, vérifie si l'un est multiple de l'autre en renvoyant 0 (faux en informatique) ou 1 (vrai en informatique).

Déterminer tous les diviseurs (positifs) d'un entier.

La difficulté pour déterminer tous les diviseurs d'un entier est de s'assurer de travailler de façon exhaustive : il ne faut en laisser aucun de côté.

Rechercher des diviseurs revient à se poser la question des façon d'écrire un entier comme produit d'autre entiers. Dès lors qu'il s'agit de décomposer en facteurs un nombre nous pensons au nombres premiers et au résultat fondamental de l'arithmétique : la décomposition en facteurs premiers de tout entier naturel.

Exemples.

1. Les diviseurs de 6. $6 = 2 \times 3$ donc 1, 2, 3 et 6 sont des diviseurs de 6
2. Les diviseurs de 12.
3. Les diviseurs de 72.

Exercice 5.
Exercice 87 page 68 du manuel Indice 2019.

Exercice 6.
Exercices 86 et 88 page 68 du manuel Indice 2019.

Démontrer un résultat général avec multiple ou diviseur.

Proposition 1

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

(i) n est pair si et seulement si il est possible de trouver un entier q tel que $n = 2 \times q$.

(ii) n est impair si et seulement si il est possible de trouver un entier q tel que $n = 2 \times q + 1$.

Démonstration 1

Découle directement de la précédente définition.

Remarques.

1. Dès qu'il s'agit de démontrer un résultat concernant tous les nombres paires ou du moins une partie d'entre eux nous utiliserons cette façon d'écrire un nombre pair. Et de même pour les nombres impairs
2. De même n est un multiple de 3 ou n est divisible par 3) s'il peut s'écrire sous la forme $n = 3 \times q$.

Exercice 7.

Démontrez que le produit d'un nombre pair par un entier naturel est un nombre pair.

Correction exercice 7

L'énoncé dont nous devons démontrer la véracité est une *propriété universelle* : il est valable pour de nombreuses valeurs. Il s'agit de démontrer que, quelque soit le nombre pair choisi et quelque soit l'entier naturel choisi leur produit est pair. Pour que notre démonstration soit générale il ne faut pas choisir des valeurs particulières c'est pourquoi nous utiliserons des lettres pour désigner ces nombres.

Soient p un nombre pair et m un nombre pris dans $\mathbb{N}$.

Le terme « Soient » signifie que les nombres p et m sont fixés (bien que nous n'ayons pas choisi de valeur particulière), ce ne sont pas des variables.

Notre objectif est de vérifier que le produit pm est pair.

Nous utilisons une caractérisation des nombres pairs que nous retrouverons très souvent.

Puisque p est pair, il existe un entier naturel n tel que : $p = 2n$ et donc :

$$\begin{aligned} pm &= (2n)m \\ &= 2(nm) \end{aligned}$$

Puisque nm est un entier, $2(nm)$ est un nombre pair. Autrement dit pm est un nombre pair.

Nous avons démontré que

quelque soit le nombre pair p et quelque soit l'entier m, pm est (toujours) un nombre pair.

Exercice 8.

Démontrez que la somme de deux multiples de 7 est un multiple de 7.

Correction exercice 8

Soient m et n deux multiples de 7.

Démontrons que $m+n$ est un multiple de 7.

Dire que m est un multiple de 7 équivaut à dire qu'il peut s'écrire $m = 7p$ où p est un entier.

De même, il existe un entier q tel que $n = 7q$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} m+n &= 7p+7q \\ &= 7(p+q) \end{aligned}$$

Autrement dit $m+n$ est un multiple de 7.

Nous avons démontré que quelque soient m et n des multiples de 7, $m+n$ est aussi un multiple de 7.

Exercice 9. Application.

Démontrez que le produit d'un entier naturel divisible par 3 et d'un entier naturel divisible par 7 est divisible par 21.

Correction exercice 9

Soient m un multiple de 3 et n un multiple de 7.

Démontrons que mn est un multiple de 21.

Autrement dit il faut démontrer qu'il est possible d'écrire mn sous la forme : $mn = 21\times ?$.

Dire que m est un multiple de 3 équivaut à dire qu'il peut s'écrire $m = 3p$ où p est un entier.

Dire que n est un multiple de 7 équivaut à dire qu'il peut s'écrire $m = 7q$ où q est un entier.

Ainsi :

$$\begin{aligned} mn &= 3p7q \\ &= 21(pq) \end{aligned}$$

Autrement dit mn est un multiple de 21.

> Nous avons démontré que quelque soient m et n des multiples respectivement de 3 et 7, mn est un multiple de 21.

Exercice 10. Application.

Démontrez que la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3.

Correction exercice 10

L'astuce dans cet exercice consiste à remarquer que trois entiers consécutifs peuvent s'écrire n, $n+1$ et $n+2$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

Démontrons que $n+(n+1)+(n+2)$ est un multiple de 3.

$$\begin{aligned} n+(n+1)+(n+2) &= 3n+3 \\ & 3n+3\times 1 \\ &= 3(n+1) \end{aligned}$$

Ainsi $n+(n+1)+(n+2)$ est un multiple de 3.

> Nous avons démontré que la somme de trois entiers consécutif est un multiple de 3.

Exercice 11.

Démontrez que la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.

Correction exercice 11

Soient $n \in \mathbb{Z}$ un nombre pair et $m \in \mathbb{Z}$ un nombre impair.

Démontrons que $n+m$ est impair.

Puisque n est pair il existe un nombre $p \in \mathbb{Z}$ tel que : $n = 2p$.
Puisque m est pair il existe un nombre $q \in \mathbb{Z}$ tel que : $m = 2q+1$.

$$\begin{aligned} n+m &= 2p+2q+1 \\ &= 2(p+q)+1 \end{aligned}$$

Ainsi $n+m$ est un nombre impair.

Nous avons démontré que la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.

Proposition 2

Le carré d'un nombre impair est un nombre impair.

Démonstration 2

Soit m un nombre impair.

Démontrons que m^2 est impair.

Puisque m est impair il peut s'écrire $m = 2n + 1$ où n est un entier naturel. Donc :

$$\begin{aligned} m^2 &= (2n+1)^2 \\ &= (2n+1)(2n+1) \\ &= 2n \times 2n + 2n \times 1 + 1 \times 2n + 1 \times 1 \\ &= (2n)^2 + 2n + 2n + 1 \\ &= 4n^2 + 4n + 1 \end{aligned}$$

Pour s'assurer que ce nombre est bien un nombre impair il faut montrer qu'il est possible de l'écrire sous la forme $2p + 1$.

$$\begin{aligned} m^2 &= 2 \times 2n^2 + 2 \times 2n + 1 \\ &= 2(2n^2 + 2n) + 1 \end{aligned}$$

Nous avons démontré que quelque soit le nombre impair m, m^2 est aussi un nombre impair.

Exercice 12.

Démontrez que le cube d'un nombre impair est un nombre impair.

Correction exercice 12

Ce résultat peut être justifié par les résultats obtenus dans les exercices précédents.

Soit $n \in \mathbb{Z}$ un nombre impair.

Démontrons que n^3 est impair.

Puisque n est impair il existe un nombre $q \in \mathbb{Z}$ tel que : $n = 2q + 1$.

$$\begin{aligned}
n^3 &= (2q+1)^3 \\
&= (2q+1)(2q+1)(2q+1) \\
&= [2q \times 2q + 2q \times 1 + 1 \times 2q + 1 \times 1](2q+1) \\
&= \left[4q^2 + 4q + 1\right](2q+1) \\
&= 4q^2 \times 2q + 4q^2 \times 1 + 4q \times 2q + 4q \times 1 + 1 \times 2q + 1 \times 1 \\
&= 8q^3 + 4q^2 + 8q^2 + 4q + 2q + 1 \\
&= 8q^3 + 12q^2 + 6q + 1 \\
&= 2\left[4q^3 + 6q^2 3q\right] + 1
\end{aligned}$$

Ainsi n^3 est un nombre impair.

Le cube d'un nombre impaire est forcément un nombre impair.

Exercice 13.

Démontrez que l'ensemble des multiples de 6 est inclus dans l'ensemble des multiples de 3.

III Raisonnement par l'absurde.

Une invention grecque.

Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer vrai un énoncé que l'on sait faux et, à force de raisonnements, montrer que cette supposition conduit à une incohérence. Le procédé rhétorique similaire est appelé *reductio ad absurdum.*

Démontrer par l'absurde que : $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

Démontrer par l'absurde que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Lemme 1

Soit $p \in \mathbb{Z}$.

Si ^{2} est pair alors p est pair.

Démonstration 3

Il s'agit de la contraposée de l'affirmation : « si $p \in \mathbb{Z}$ est impair alors p^2 est impair ».

Proposition 3

Démontrez en raisonnant par l'absurde que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Démonstration 4

Démontrons en raisonnant par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel.
Il faut interpréter ceci en utilisant la définition du nombre rationnel.
Il existe donc des entiers naturels p et q avec q non nul tels que : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.
Montrons que p et q sont des nombres pairs.

* Donc, en multipliant par q de part et d'autre dans l'égalité : $q\sqrt{2} = p$.
Nous allons nous ramener à l'arithmétique en utilisant des entiers naturels.

$$\left(q\sqrt{2}\right)^2 = p^2$$

nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}\right)^2 q^2 &= p^2\\ 2q^2 &= p^2\end{aligned}$$

Donc p^2 est pair et, d'après le lemme p est donc pair.

* Puisque p est pair il existe k tel que $p = 2k$. Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned}2q^2 &= (2k)^2\\ 2q^2 &= 4k^2\\ q^2 &= 2k^2\end{aligned}$$

Donc q^2 est pair et d'après le lemme q aussi est pair.

Nous avons obtenus ici une incohérence.
Si p et q sont pairs c'est qu'ils ont un diviseur commun : 2. La fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible ce qui contredit notre hypothèse.

Nous avons démontré, en raisonnant par l'absurde, que nécessairement, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercices.

Exercice 14.

Sachant que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, démontrez en raisonnant par l'absurde que :

1. $5\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
2. $3+\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
3. $\sqrt{\sqrt{2}}$ est un nombre irrationnel.

Correction exercice 14

1. Démontrons en raisonnant par l'absurde l'irrationalité de $5\sqrt{2}$.

   Supposons que $5\sqrt{2}$ soit rationnel et démontrons que cela conduit à une contradiction.
   Dire que $5\sqrt{2}$ est rationnel signifie qu'il existe un entier a et un entier b non nul tel que :

   $$5\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

   Ce qui équivaut successivement à :

   $$\frac{5\sqrt{2}}{5} = \frac{\frac{a}{b}}{5}$$
   $$\sqrt{2} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{5}{1}}$$
   $$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{5}$$
   $$\sqrt{2} = \frac{a}{5b}$$

   $5b$ étant un entier $\frac{a}{5b}$ est une fraction et donc $\sqrt{2}$ serait un rationnel.
   C'est impossible puisque nous avons déjà démontré que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

   Nous avons démontré par l'absurde que $5\sqrt{2}$ est irrationnel.

2. Démontrons en raisonnant par l'absurde que $3+\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

   Supposons que $3+\sqrt{2}$ est rationnel et vérifions que cela conduit à une contradiction.
   Dire que $3+\sqrt{2}$ est rationnel signifie qu'il existe un entier a et un entier b non nul tel que :

   $$3+\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}3+\sqrt{2}-3 &= \frac{a}{b}-3\\ \sqrt{2} &= \frac{a}{b}-3\\ \sqrt{2} &= \frac{a}{b}-\frac{3}{1}\\ \sqrt{2} &= \frac{a}{b}-\frac{3\times b}{1\times b}\\ \sqrt{2} &= \frac{a}{b}-\frac{3b}{b}\\ \sqrt{2} &= \frac{a-3b}{b}\end{aligned}$$

$a-3b$ étant un entier $\frac{a-3b}{b}$ est une fraction et donc $\sqrt{2}$ serait un rationnel.
C'est impossible puisque nous avons déjà démontré que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Nous avons démontré par l'absurde que $3+\sqrt{2}$ est irrationnel.

3. Démontrons en raisonnant par l'absurde que $\sqrt{\sqrt{2}}$ est un nombre irrationnel.

Supposons que $\sqrt{\sqrt{2}}$ est rationnel et vérifions que cela conduit à une contradiction.
Dire que $\sqrt{\sqrt{2}}$ est rationnel signifie qu'il existe un entier a et un entier b non nul tel que :

$$\sqrt{\sqrt{2}}=\frac{a}{b}$$

Donc en élevant au carré nous obtiendrons successivement :

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^2 &= \left(\frac{a}{b}\right)^2\\ \sqrt{2} &= \frac{a^2}{b^2}\end{aligned}$$

a^2 et b^2 étant des entiers $\frac{a^2}{b^2}$ est une fraction et donc $\sqrt{2}$ serait un rationnel.
C'est impossible puisque nous avons déjà démontré que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Nous avons démontré par l'absurde que $\sqrt{\sqrt{2}}$ est irrationnel.

IV Exercices.

Exercice 15.

Une crèche dispose de 60 dalles carrées en mousse. Le personnel souhaite les placer de façon à former un rectangle.

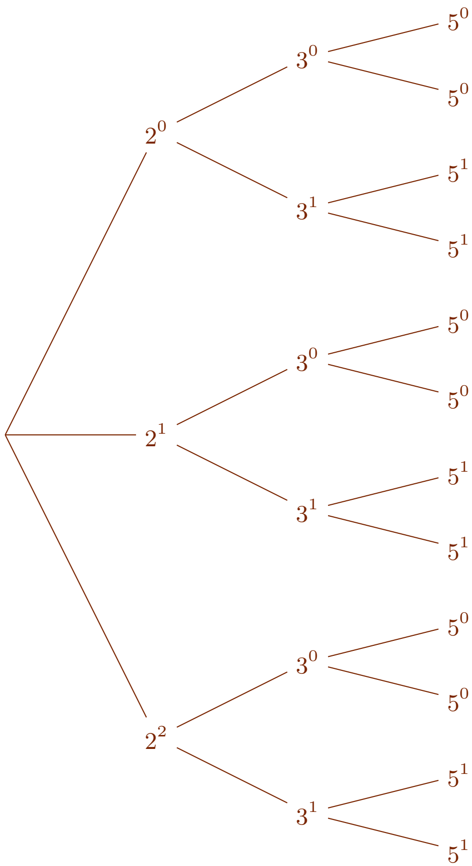
1. Quelles sont les dimensions possibles de ce rectangle ?
2. Quel est celui qui a le plus grand périmètre ?

<u>Correction exercice 15</u>

1. Nous recherchons des rectangles dont l'aire vaut exactement 60, dont les longueurs des côtés sont des entiers.

   Déterminons tous les diviseurs de 60.

   $60 = 2^2 \times 3 \times 5$.



Exercice 16.

Lors d'un tournoi il y a 80 hommes et 60 femmes inscrits. L'organisation veut constituer un maximum d'équipes mixtes contenant toutes le même nombre d'hommes que de femmes. Combien d'équipes peuvent-elles être constituées ?

Exercice 17.

1. Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne d'un entier par 3 ?
2. Justifier que tout entier naturel a peut s'écrire, soit $a = 3q$, soit $a = 3q + 1$, soit $a = 3q + 2$, avec q un entier naturel.

Exercice 18.

Déterminez un nombre entier compris entre 600 et 800, qui est pair, divisible par 11 et multiple de 3 et de 5.

Exercice 19.

Montrez que le produit de deux nombres consécutifs est un nombre pair.

Exercice 20.

Soient les nombres $a = 4p$ et $b = 5q$ avec p et q des entiers.

1. Justifiez que a est pair ?
2. b peut-il être pair ?
3. Soit $c = ab$. Montrer que c est un multiple de 10.

Exercice 21.

En utilisant la méthode du crible d'Ératosthène nous allons retrouver tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à 100.

1. Écrivez la liste des entiers naturels de 2 jusqu'à 100.
2. Hormis 2 aucun multiple de 2 n'est un nombre premier. Entourez 2 et barrez ses autres multiples.
3. Hormis 3 aucun multiple de 3 n'est un nombre premier. Entourez 3 et barrez ses autres multiples.
4. 4 étant barré entourez 5. Hormis 5 aucun multiple de 5 n'est un nombre premier. Barrez les multiples 5 autres que 5.
5. Poursuivez ainsi jusqu'à ce que tous les nombres soient barrés ou entourés.
6. Donnez la liste des nombres premiers.

Exercice 22.

1. On a mesuré une durée de 92 647 secondes.
   (a) Combien d'heures entières sont contenues dans 92 647 secondes ? Combien de secondes reste-t-il à exprimer en minutes et secondes ?
   (b) Écrire 92 647 secondes en heures, minutes, secondes.
2. Écrire en Python un algorithme qui convertit un nombre n de secondes en heures, minutes et secondes.

Exercice 23.

Exercice 24.

Exercice 25.

1. Soit n un entier naturel non nul et $p = (n+1)(n+3)$. Montrez que p n'est pas premier.
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 2 et $q = (n-1)(n^2+7)$. Pour quelles valeurs de n l'entier q est-il premier ?

Exercice 26.

Exercice 55 page 51 du manuel Déclic.

Exercice 27.

Discutez de la véracité des propositions suivantes.

1. Tout nombre entier strictement positif a un nombre pair de diviseurs.
2. Il y a plus de nombres premiers entre 20 et 30 qu'entre 40 et 50.
3. Un diviseur d'un nombre premier et forcément premier.
4. Si le carré d'un entier a est un diviseur de l'entier naturel n, alors a est un diviseur de $\sqrt{n}$.
5. Si l'entier a est un diviseur de l'entier b et s'il est aussi un diviseur de l'entier c, alors a^2 est un diviseur du produit bc.

Exercice 28.

Discutez de la véracité des propositions suivantes.

1. Si a est un diviseur n alors il existe un diviseur b de n tel que $ab = n$. Un entier a donc toujours un nombre pair de diviseurs.
2. Puisque $25 = 3 \times 7 + 4$ le quotient de la division euclidienne de 25 par 3 est 7.
3. Si un entier naturel n est premier, alors $n + 1$ n'est pas premier.
4. Si un entier naturel n n'est pas premier, alors $n + 1$ est premier.
5. Le quotient de deux nombres rationnels non nul est un nombre rationnel.
6. La somme de deux nombre irrationnels est un nombre irrationnel.
7. Le produit de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.
8. Le carré d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

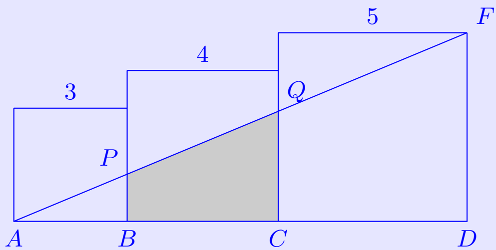
Exercice 29.

Un distributeur de billets délivre des billets de 10 €, 20 € et 50 €. Nous souhaitons le programmer pour qu'il délivre le moins de billets possible à chaque demande d'un utilisateur.

1. Un utilisateur veut retirer 720 €. Quels billets le distributeur devra-t-il délivrer ? Et s'il demande 460 € ?
2. Expliquez en langage naturel comment déterminer le nombre de billets de chaque type pour une demande d'un montant S en €, où S est un multiple de 10 non nul.

Exercice 30.

La figure ci-dessous est formée de trois carrés de côtés respectifs 3 cm, 4 cm et 5 cm.



Nous admettrons que l'aire de la partie colorée est $\mathscr{A} = \frac{1}{2}(BP + CQ) \times BC$ (aire d'un trapèze).
Les résultats seront donnés sous forme irréductible.

1. À l'aide des triangles ACQ et ADF calculez CQ.
2. À l'aide des triangles ABP et ACQ calculez BP.
3. Calculez l'aire $\mathscr{A}$.

Correction exercice 30

1. Calculons CQ.

   - Configuration de Thalès.
     Les points A, C, D d'une part et A, Q, F d'autre part sont alignés dans cet ordre.
   - Hypothèse d'utilisation du théorème de Thalès.
     Puisque les quadrilatères sont des carrés $(CQ) \parallel (DF)$

   Des deux points précédents nous déduisons d'après le théorème de Thalès que

   $$\frac{CQ}{DF} = \frac{AC}{AD}.$$

   Nous en déduisons successivement :

   $$\begin{aligned}\frac{CQ}{5} &= \frac{3+4}{3+4+5}\\ \frac{CQ}{5} &= \frac{7}{12}\\ \frac{CQ}{5}\times 5 &= \frac{7}{12}\times 5\\ CQ &= \frac{35}{12}\end{aligned}$$

   $$\boxed{CQ = \frac{35}{12}\text{ cm.}}$$

2. En procédant de même :

   $$\boxed{BP = \frac{5}{4}.}$$

3. Calculons $\mathscr{A}$.

   Il s'agit d'un trapèze donc

   $$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \frac{1}{2}(BP + CQ)\times BC\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}+\frac{35}{12}\right)\times 4\\ &= \frac{25}{3}\end{aligned}$$

   $$\boxed{\mathscr{A} = \frac{25}{3}\text{ cm}^2.}$$

Exercice 31.

Un entier naturel de trois chiffres commence par 3 et se termine par 4. Le chiffre des dizaines est effacé : $3\dots4$.
Peut-on trouver ce nombre si l'on sait qu'il est divisible par 9 ? 3 ? 4 ? 2 ? 5 ?

Exercice 32.

Nous allons démontrer en raisonnant par l'absurde que $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel.
Nous supposons donc que $\sqrt{3}$ est un nombre rationnel, c'est-à-dire qu'il s'écrit $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, avec p et q des entiers naturels premiers entre eux et q non nuls.

1. Montrez que $p^2 = 3qq^2$.
2. Nous allons dans cette question démontrer que si 3 est un diviseur de p^2 alors il est aussi diviseur de p. Pour cela nous en raisonnerons à nouveau par l'absurde.
   (a) Supposons que 3 n'est pas un diviseur de p. Montrez qu'alors le nombre p peut s'écrire, soit sous la forme $3k+1$ soit sous la forme $3k+2$, avec k entier.
   (b) Si $p = 3k + 1$ montrez que cela abouti à une contradiction.
   (c) Faites de même si $p = 3k + 2$.
   (d) Concluez.
3. (a) Déduisez-en qu'il existe un entier naturel a tel que $q^2 = 3a^2$.
   (b) En utilisant le résultat de la question 2. montrez qu'alors 3 est un diviseur de q.
   (c) Concluez quand à l'irrationalité de $\sqrt{3}$.

Exercice 33.

Un entier est appelé un carré parfait s'il est le carré d'un autre entier.
Démontrez l'équivalence suivante pour tout entier naturel n : « $\sqrt{n}$ est un entier si et seulement si n est un carré parfait ».

Exercice 34.

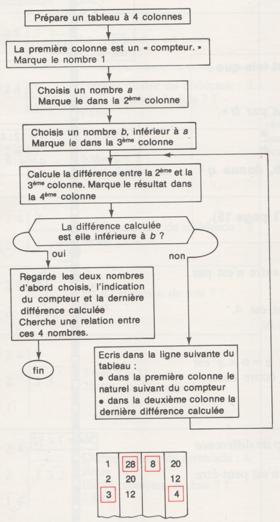
À la fin du trimestre le professeur fait des moyennes. Ses élèves avaient 12 notes. Les moyennes sont inscrites sur le cahier de notes arrondies au $\frac{1}{2}$ point supérieur. le professeur ne veut pas faire de divisions (surtout s'il a beaucoup d'élèves) et il n'a pas de machine : il se fabrique alors une table de multiplication par 12

1	12
2	24
3	36
...	...

Complète cette table.
Dis comment le professeur peut faire pour trouver alors les moyennes de :
- France qui a 193 points,
- Georges qui a 157 points,
- Laurence qui a 106 points,
- Lucien qui a 52 points.

Exercice 35.

12. Voici un organigramme.
Après l'avoir lu et compris, fais-le fonctionner comme dans l'exemple donné sous l'organigramme (avec deux nombres de ton choix).
Quelle opération penses-tu avoir réalisé à partir des deux nombres choisis ?



Exercice 36.

Une voiture est filmée lors d'une prise de vue cinématographique. Elle est équipée de roues **à cinq rayons** ayant un diamètre total de 54 cm. L'une de ces roues est représentée ci-dessous :

1. Calculer la circonférence de cette roue en cm (arrondie au millimètre).
2. La voiture roule à 110 km.h^{-1}.
   (a) Calculer le nombre de tours par seconde que fait la roue (au tour près).
   (b) La caméra utilisée a une vitesse de défilement de 24 images par seconde. Combien de tours aura fait le pneu de la voiture entre deux images ?
3. À quelle vitesse, en km/h, devrait rouler la voiture pour que, regardant le film, on ait l'impression que les roues ne tournent pas ?

Correction exercice 36

1. Calculons la circonférence, c, de la roue.

   Si r désigne le rayon de la roue et d son diamètre alors

$$\begin{aligned} c &= 2\pi r \\ &= 2\pi \frac{d}{2} \\ &= 2\pi \times \frac{54}{2} \text{ cm} \\ &= 54\pi \text{ cm} \\ &\approx 169{,}64 \text{ cm} \end{aligned}$$

   La circonférence de la roue est de 169,4 cm.

2. La voiture roule à 110 km.

   (a) Déterminons le nombre de tour par seconde.

   Exprimons la vitesse, v du véhicule, en mètre par seconde.

$$\begin{aligned}
v &= 110 \text{ km/h} \\
&= 110 \ \frac{1 \text{ km}}{1 \text{ h}} \\
&= 110 \ \frac{1000 \text{ m}}{60 \times 60 \text{ s}} \\
&= 110 \cdot \frac{1000}{60 \times 60} \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
&= \frac{275}{9} \text{ m/s} \\
&\approx 30{,}556 \text{m/s}
\end{aligned}$$

Par conséquent en 1 s le nombre de tours effectué par la roue est

$$\begin{aligned}
\frac{v}{c} &\approx \frac{30{,}556 \text{ m/s}}{169{,}4 \text{ cm}} \\
&\approx \frac{30{,}556 \text{ m/s}}{169{,}4 \times 1 \text{ cm}} \\
&\approx \frac{30{,}556 \text{ m/s}}{169{,}4 \times 0{,}01 \text{ m}} \\
&\approx \frac{30{,}556}{169{,}4 \times 0{,}01} \ \frac{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{m}} \\
&\approx 18{,}037 \text{ s}^{-1}
\end{aligned}$$

Nous pourrions aussi bien utiliser l'unité de fréquence le hertz : Hz.

La roue fait 18 tours par seconde.

(b) Déterminons le nombre de tours de roue, N_t, par image.

$$\begin{aligned}
N_t &= \frac{18}{24} \\
&= \frac{3}{4} \\
&= 0{,}75
\end{aligned}$$

Entre deux images le pneu aura fait les $\frac{3}{4}$ d'un tour.

3. Déterminons, par exemple, la vitesse v_1 pour qu'entre deux images la roue ait fait un tour.

Autrement dit la roue fait 24 tours par seconde, ce qui correspond à une vitesse de :

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{24 \times c}{1 \text{ s}} \\
&\approx \frac{24 \times 169{,}4 \text{ cm}}{1 \text{ s}} \\
&\approx \frac{24 \times 169{,}4}{1} \frac{\text{cm}}{\text{s}} \\
&\approx 4065{,}6 \frac{1 \text{ cm}}{1 \text{ s}} \\
&\approx 4065{,}6 \frac{0{,}000\,01 \text{ km}}{\frac{1}{60\times60} \text{ h}} \\
&\approx 4065{,}6 \times 60 \times 60 \times 0{,}000\,01 \frac{\text{km}}{\text{h}} \\
&\approx 146{,}361\,6 \text{ km/h}
\end{aligned}
$$

Du fait de la forme de la roue qui a 5 rayons il suffit que la roue effectue de un quatre cinquième d'un tour pour que nous ayons l'impression d'immobilité.
Ainsi les vitesses

$$
\begin{aligned}
v_{\frac{1}{5}} &\approx 29{,}27 \text{ km/h} \\
v_{\frac{2}{5}} &\approx 58{,}54 \text{ km/h} \\
v_{\frac{3}{5}} &\approx 87{,}82 \text{ km/h} \\
v_{\frac{4}{5}} &\approx 117{,}01 \text{ km/h}
\end{aligned}
$$

conviennent également (en se limitant aux vitesses autorisées par le code de la route).

Pour avoir l'impression que les roues ne tournent pas il faudrait que le véhicule roule à une vitesse multiple de 29,27 km/h.

Exercice 37.

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant.

1. Affirmation : « 117 est un nombre premier. »
2. Affirmation : « Pour n'importe quel nombre entier n, $(n+2)^2 - (n-2)^2$ est un multiple de 8. »

Correction exercice 37

1. $1 + 1 + 7 = 9$ et 9 est divisible par 3, donc 117 est divisible par 3.

   L' affirmation 1 est fausse.

2. $$\begin{aligned}(n+2)^2 - (n-2)^2 &= [(n+2) - (n-2)] \times [(n+2) + (n-2)] \\ &= 4[2n] \\ &= 8n\end{aligned}$$

   L'affirmation 2.(a) est vraie.

Exercice 38.

Démontrez que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal en raisonnant par l'absurde.
Indication. Dire qu'une nombre est décimal cela signifie que nous pouvons l'écrire $\frac{a}{10^n}$ *avec* $a \in \mathbb{Z}$ *et* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 39.

Démontrez que l'ensemble des nombres premiers est infini en raisonnant par l'absurde.
Indication. Considérez le produit de tous les nombres premiers augmenté de 1.

Exercice 40.

Écriture décimale périodique et rationalité.

1. Écriture décimale.
   Le nombre $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ n'est pas un nombre décimal mais on peut écrire son développement décimal illimité sous la forme $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$.
   (a) Posez la division euclidienne de 14 par 11 et de 1 427 par 333.
   (b) Qu'observez-vous ?
   (c) Écrivez le développement décimal illimité de chacun des quotients $\frac{14}{11}$ et $\frac{1\,427}{333}$.
   (d) i. Quelles valeurs peuvent prendre les restes dans une division par 11 ?
   Comment alors pouvez-vous expliquer cette périodicité dans la partie décimale de $\frac{14}{11}$?
   ii. Quelles valeurs peuvent prendre les restes dans une division par 333 ?
   Comment alors pouvez-vous expliquer cette périodicité dans la partie décimale de $\frac{1\,427}{333}$?
   iii. De manière plus générale, que pouvez-vous dire du développement décimal d'un nombre rationnel ?
2. Nous savons à partir de l'écriture fractionnaire d'un nombre rationnel déterminer son développement décimal. Dans cette partie, nous chercherons sur des exemples, une écriture fractionnaire d'un nombre rationnel écrit sous la forme d'un développement décimal périodique.
   (a) Considérons le nombre $x = 1{,}\overline{8}$.
   Calculez $10x - x$ et concluez.
   (b) Adaptez la méthode afin de déterminer une écriture fractionnaire de $y = 1{,}\overline{58}$ puis de $z = 4{,}23\overline{569}$.
   (c) Montrez que $0{,}\overline{9} = 1$.
   Le résultat de cette question est surprenant : le développement décimal illimité de certains nombres n'est pas forcément unique.

Exercice 41.

Algorithme d'Euclide pour déterminer le P.G.C.D. de deux entiers naturels.

Exercice 42.

Écriture décimale et divisibilité

Exercice 43.

Polynôme d'Euler.