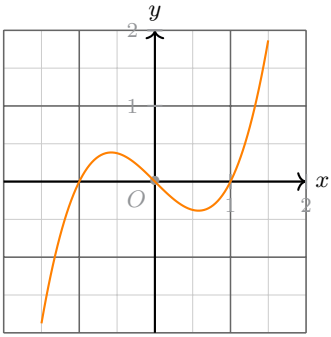
Généralités sur les fonctions.

Ce qui attendu d'un élève de lycée.

L'objectif est que vous soyez capable de traduire géométriquement, graphiquement, une formule de calcul.

Au collège vous avez étudié des fonctions affines dont les courbes représentative sont des droites. Voici une autre fonction $f(x) = x^3 - x$ dont la courbe représentative est ci-dessous.



Notre objectif sera d'apprendre à jongler entre l'aspect géométrique (la courbe) et l'aspect algébrique (la formule de calcul).

Y a-t-il des valeurs de x pour lesquelles il n'y a pas de point de la courbe	Étude du domaine de définition, recherche des valeurs interdites.
La courbe est-elle au-dessus de l'axe des abscisses ?	Étude du signe de $f(x)$.
La courbe monte-t-elle ou descend-t-elle ?	La fonction est-elle croissante ou décroissante ?
Pente de la courbe en chaque point.	Nombre dérivé.
La courbe est-elle arrondie ou avec des angles piquants ?	Étude de la dérivabilité de la fonction
En certaines parties la courbe ne ressemble-t-elle pas à une droite ?	Étude des tangentes et asymptotes.
L'arrondi de la courbe se fait-il vers le haut ou vers le bas ?	Étude de la convexité de la fonction.
Étude du signe de la différence de deux fonctions.	Position relative des courbes.
Aire sous la courbe.	Calcul intégral.

Équations de courbes.

Les courbes (les lignes) sont des ensembles infinis de points. Une façon de décrire une courbe consiste à donner une relation de calcul qui lie abscisse et ordonnée de chacun des points de la courbe, une équation liant l'abscisse x et l'ordonnée y de chaque point de la courbe.

Ainsi : $x^2 + y^2 = 16$ ou $2x - y + 1 = 0$ ou $y = x^2$ sont des équations de courbes

Nous nous intéresserons aux courbes dont l'équation est de la forme $y = f(x)$ qui sont les courbe associées à des fonctions.

Définition de la fonction.

Une fonction f indique des liens entre des nombres. Par exemple pour indiquer que f relie le nombre 2 au nombre 3 nous écrirons :

$$f(2) = 3.$$

Nous dirons alors que 2 est *un antécédent* de 3 par f.
Nous dirons aussi que 3 est *l'image* de 2 par f.

Définition 1. Soit $\mathscr{D}$ un ensemble de nombres. On définit une *fonction f sur $\mathscr{D}$* en associant à chaque nombre x appartenant à $\mathscr{D}$ un seul nombre y, noté $f(x)$. Nous dirons que f est une fonction de la *variable* x. La *courbe représentative de f*, que nous noterons souvent $\mathscr{C}_f$ est l'objet géométrique formé de tous les points de coordonnées $(x; f(x))$ lorsque x prend toutes les valeurs possibles dans $\mathscr{D}$.

$\mathscr{D}$ est *l'ensemble* (ou *domaine*) *de définition* de f.
$\mathscr{D}$ est l'ensemble des nombres auxquels un nombre est associé par f. On dit que f est définie sur $\mathscr{D}$.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y \end{array} \right.$$

Cette présentation se lit : « la fonction f, définie sur $\mathscr{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et qui à x associe y ».

x est *un antécédent* de y par f.

y est *l'image* de x par f. On le note $f(x)$ et on lit « f de x ».

Remarques.

1. La première ligne ($\mathscr{D}$ et $\mathbb{R}$) est celle des ensembles, la seconde (x et y) celle des variables.
2. La première colonne ($\mathscr{D}$ et x) correspond à l'axe des abscisses, la seconde ($\mathbb{R}$ et $y = f(x)$) à celui des ordonnées.
3. Le préfixe « anté- » signifie avant (latin).
4. « un » antécédent car il peut y en avoir plusieurs.
5. « l' »image car (par construction) il ne peut y en avoir qu'une.

Exemples.

1. Fonction définie par un diagramme sagittal.
2. Fonction définie par une situation géométrique : l'aire d'un rectangle en fonction de la longueur d'un côté.
3. La fonction qui a un nombre de points associe le nombre d'arêtes du graphe.
4. Le mot « fonction » est utilisé pour la première fois par Gottfried Leibniz (1646-1716) à la fin du XVIIe siècle à propos de l'étude des courbes. La notion est ensuite affinée par Leonhard Euler (1707-1783) qui définit les fonctions à partir d'expression algébriques littérales (comme, par exemple, $2x + 4xx$) et qui est le premier à utiliser la notation $f(x)$. Enfin, la fonction en tant que correspondance, telle qu'on la définit aujourd'hui, n'émerge qu'au milieu du XIXe siècle, pour devenir une notion réellement centrale en mathématiques.

Représenter des liens par une formule de calcul ou un procédé implicite.

Très souvent les liens entre les nombres seront représentés par des calculs. Par exemple nous écrirons

$$f : x \mapsto 2x - 1,$$

et nous lirons « la fonction f qui à x associe $2x - 1$ », pour indiquer qu'à chaque nombre x choisi nous associerons le résultat du calcul $2x - 1$. Ce lien que vous avez déjà rencontré au collège défini une fonction affine.

Exemples.

1. Les fonctions affines. $f : x \mapsto ax + b$ où $a,b \in \mathbb{R}$ et $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
2. Les fonctions linéaires. $f : x \mapsto ax$ où $a \in \mathbb{R}$ et $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
3. Les fonctions constantes. $f : x \mapsto b$ où $b \in \mathbb{R}$ et $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
4. La fonction carré. $x \mapsto x^2$ et $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
5. La fonction cube. $fx \mapsto x^3$ et $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
6. La fonction inverse. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $\mathscr{D}_f =]-\infty.0[\cup]0;+\infty[= \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{O\}$.
7. La fonction racine carrée. $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $\mathscr{D}_f = [0;+\infty[= \mathbb{R}_+$. Définition avec une phrase définissant la racine carré. Pas de formule calculatoire. Nous ne connaissons pas de procédé de calcul de ces valeurs mais seulement les algorithme , des programmes qui permettent d'obtenir des valeurs approchées aussi précisent que possibles. Nous étudierons certains qui permettent d'obtenir $\sqrt{2}$.

Remarques.

1. Si, pour les modélisations en sciences expérimentales (physique, chimie, biologie, géologie, économie,...), les fonctions constantes et linéaires correspondent à des modélisations spécifiques, pour l'étude mathématique, elles ne sont que des cas particuliers de fonctions affines.
2. Pour la fonction racine carrée nous n'avons pas réellement une formule. Nous ne connaissons que les racines carrées des carrés parfaits (0, 1, 4, 9, 16, ...). L'utilisation du symbole $\sqrt{}$ n'indique pas un procédé de calcul pour obtenir ne serait-ce qu'une valeur approchée de la valeur désirée. Nous verrons des algorithmes pour obtenir des valeurs approchées. Ainsi pour obtenir une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de $\sqrt{x}$:

```
v=0
while v**2<x:
    v=v+0.01
print(v-0.01)
```

Il s'agit, hormis pour les carrés parfaits, d'un procédé de définition implicite : la racine carrée est l'antécédent positif par la fonction carrée.

Tableau de valeurs.

Il est possible de représenter des nombres reliés par une fonction en les plaçant en vis-à-vis dans un tableau.

Par exemple, en utilisant la fonction affine précédente, nous voyons :

$$f(-1) = 2 \times (-1) - 1 = -3.$$

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-1	1	3	5

Nous utiliserons en général la calculatrice pour obtenir le tableau.

Exemples.

1. Déterminons le tableau de valeurs de $f : x \mapsto 2x^2 - 3x + 1$ pour x allant de -1 à 2 avec un pas de 0,5.
2. Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$. Complétons le tableau de valeurs :

x	0	2	3,5	10^{15}
$f(x)$				

Représentation graphique.

Définition 2. Soient $\mathscr{D}$ un ensemble de nombres, $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ une fonction. La *représentation graphique de f*, que nous noterons souvent $\mathscr{C}_f$ est l'objet géométrique formé de tous les points de coordonnées $(x; f(x))$ (dans un certain repère) lorsque x prend toutes les valeurs possibles dans $\mathscr{D}$.

Remarques.

1. La courbe représentative (pas le dessin mais l'ensemble des couples $(x; f(x))$) est le point de vue retenu pour la définition générale d'une fonction.
2. Comme $f(x)$ est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse x nous dirons aussi que $\mathscr{C}_f$ est la *courbe d'équation $y = f(x)$*.
3. Le tableau de valeurs est donc formé des coordonnées de points de la représentation graphique de la fonction :

x	abscisse du point
$y = f(x)$	ordonnée du point.

Exemples.

1. Fonction affine. La courbe est une *droite* (nous le démontrerons après avoir défini proprement les droites).
2. Fonction carré. La courbe est une *parabole*.
3. Fonction cube.
4. Fonction inverse. La courbe est une *hyperbole*.
5. Fonction racine carrée. La courbe est une branche de parabole.

Tableau de signe.

Étudier le signe d'une fonction c'est déterminer le signe du nombre $f(x)$ en fonction des diverses valeurs prises par x. Plus précisément c'est déterminer pour quelles valeurs de x, $f(x)$ est strictement positif, strictement négatif et enfin nul.

Une autre façon de le dire : c'est résoudre les inéquations $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ et l'équation $f(x) = 0$.

Le tableau de signe est un tableau ressemblant au tableau de valeurs qui permet de résumer l'étude du signe d'une fonction f. Autrement dit c'est une schématisation de la position de la courbe représentative de la fonction par rapport à l'axe des abscisses. Confer les fonctions de références à titre d'exemples.

Exemples.

1. Aspect analytique. Étudions le signe de $f : x \mapsto 2x - 1$.

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\Leftrightarrow 2x - 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 1 + 1 > 0 + 1 \\ &\Leftrightarrow 2x > 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x}{x} > \frac{1}{2} \quad \text{car } 2 > 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[\end{aligned}$$

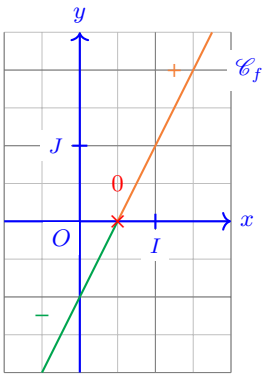
De même : $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ et $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

On résume cette étude par :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f		$-$	0	$+$	

Cette façon de procéder nécessite que nous améliorions nos compétences en matière de résolution d'inéquations.

2. Aspect géométrique.



Partie de la courbe correspondant à des $f(x)$ strictement positifs.

Partie de la courbe correspondant à des $f(x)$ nuls.

Partie de la courbe correspondant à des $f(x)$ strictement négatifs.

On retrouve :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f		$-$	z	$+$	

Tableau de variation.

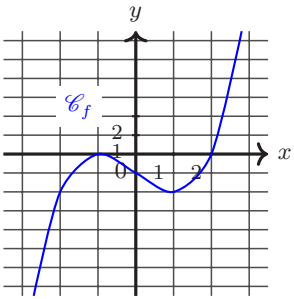
Le tableau de variation est un tableau ressemblant au tableau de signe qui permet de résumer l'étude des variations d'une fonction f. Autrement dit c'est une schématisation du fait que la courbe représentative de la fonction monte ou descend. Confer les fonctions de références à titre d'exemples.

Pour l'instant nous nous contenterons de lectures graphiques pour déterminer la variation d'une fonction.

Les fiches d'identité des fonctions de références.

Exercices.

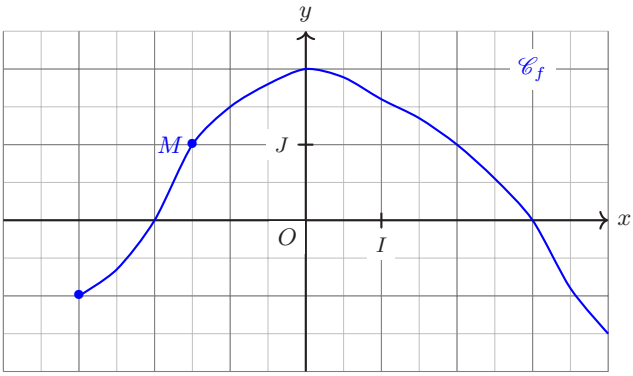
EXERCICE 1. On considère ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f.



Complétez le tableau de valeurs suivant.

x	-2		0		2
$f(x)$		0		-2	

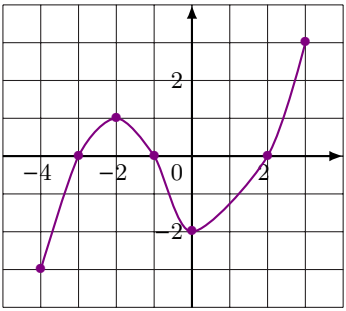
EXERCICE 2. Une fonction f est représentée ci-dessous dans un repère (O,I,J).



Répondez aux questions suivantes sans justification.

1. Donnez l'ensemble de définition de f.
2. Quel est l'image de 2 par f.
3. Quel est l'ensemble des antécédents de 0 par f ?
4. Quel est l'ensemble des antécédents de -2 par f ?
5. Quel est l'ensemble des antécédents de 2 par f ?
6. Quel est l'ensemble des antécédents de 2,5 par f ?
7. Si x appartient à $[-1{,}5; 1]$ que peut-on dire de $f(x)$?
8. Quel est l'abscisse de M ?
9. Quel est l'ordonnée de M ?

EXERCICE 3. On considère une fonction f définie sur $[-4; 3]$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

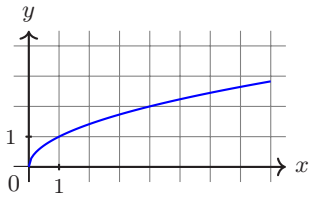


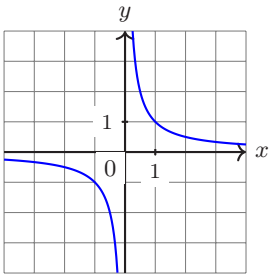
1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Quels sont le (ou les) antécédent(s) de 0 par f ?
3. Combien d'antécédent(s) possède 2 ?
4. Quel est le nombre d'antécédent(s) de 1 ?
5. Donner un nombre réel m qui n'a qu'un unique antécédent par f.
6. Donner le nombre d'antécédent(s) de t par f, suivant les valeurs de t.

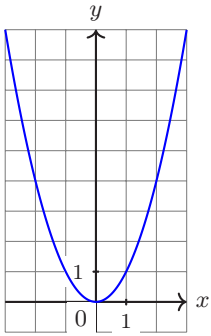
EXERCICE 4. Associez, sans aucune justification, chaque fonction à sa courbe représentative.

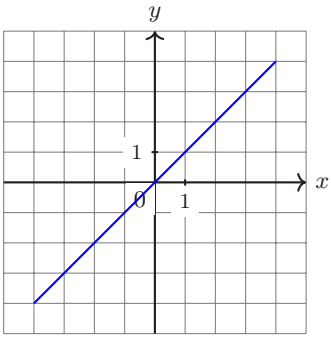
$f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $f_2 : x \mapsto x$,

$f_3 : x \mapsto \sqrt{x}$, $f_4 : x \mapsto x^2$.

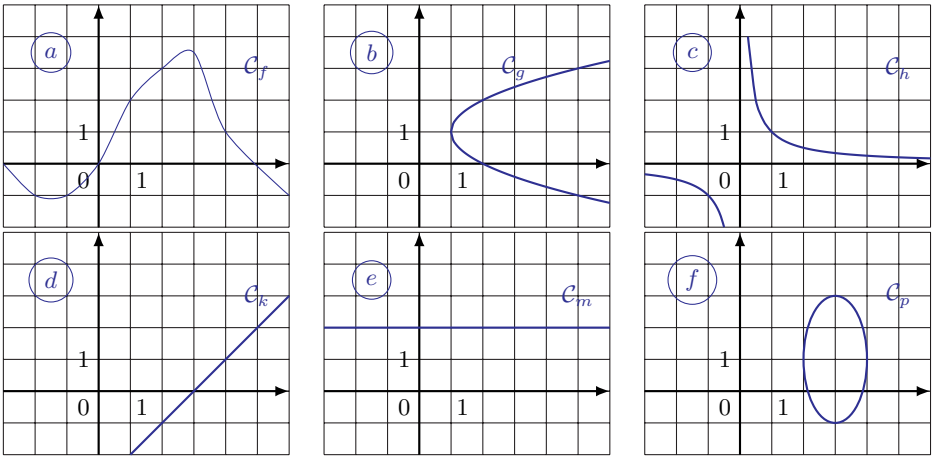








EXERCICE 5. Parmi les graphiques proposés, lesquels correspondent à la représentation graphique d'une fonction ?



EXERCICE 6.

Exercice 31 page 55 du manuel lelivrescolaire.fr.

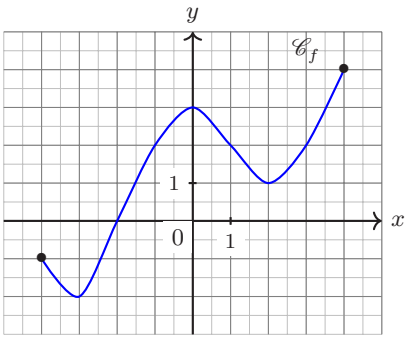
EXERCICE 7. Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $y = 2x^2 - 4x - 1$ (*i.e.* la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 2x^2 - 4x - 1$), où x est un réel de l'intervalle $[-2; 2]$.

1. (a) Les points $A(0; 2)$ et $B(-1; 7)$ appartiennent-ils à $\mathscr{C}$?
   (b) Calculez l'ordonnée du point D de $\mathscr{C}$ dont l'abscisse est 2.
2. (a) Construisez un tableau de valeur de y pour x variant de -2 à 2 avec un pas de 1.
   (b) Tracez $\mathscr{C}$ dans un repère.

EXERCICE 8. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f : x \mapsto 2x^2 + 6$.

1. Donnez sans justification le tableau de valeurs de f pour x variant de -2 à 0,5 avec un pas de 0,5.
2. Tracez $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé.
3. Le point $M(0{,}4; 2{,}72)$ appartient-il à $\mathscr{C}$?
4. Quelle est l'ordonnée du point K de $\mathscr{C}$ d'abscisse 0,3 ?
5. Déterminez algébriquement l'abscisse de chacun des deux points de $\mathscr{C}$ d'ordonnée 8.

EXERCICE 9. Une fonction numérique f est représentée ci-après.



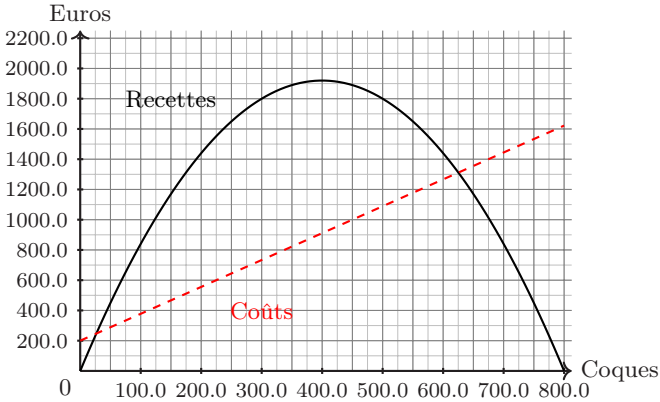
Dans cet exercice nous adopterons la notation suivante : $f([0; 1])$ désignera l'ensemble de toutes les images des nombre compris entre 0 et 1, $f^{-1}([0; 1])$ désignera l'ensemble de tous les antécédents des nombres compris entre 0 et 1.

1. Déterminez $f([0;1])$.
2. Déterminez $f([1;3])$.
3. Déterminez $f^{-1}([0;1])$.
4. Déterminez $f^{-1}([-2;2])$.

EXERCICE 10. Soient $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x}$.

1. Donnez l'ensemble de définition de f.
2. Donnez l'ensemble de définition de g.
3. Déduisez des deux questions précédentes l'ensemble de définition de la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x} + \frac{1}{x}$.

EXERCICE 11. Un entrepreneur lance sur le marché de nouvelles coques haut de gamme pour les téléphones mobiles. Sur le graphique donné ci-dessous sont tracées les courbes représentant les recettes (en trait plein) et les coûts (en pointillés), en fonction du nombre de coques fabriquées exprimé en centaines d'unités. Les ateliers permettent la fabrication de 0 à 800 coques. Les recettes et les coûts sont exprimés euros.



Les réponses aux questions suivantes sont à justifier par lecture graphique avec, éventuellement, des tracés sur le graphique.

1. Étude du coût.
   (a) Quel est le coût de production de 125 coques ?
   (b) Pour quelle quantité de coques fabriquées le coût est-il de 1 000 euros ?
2. Étude de la recette.
   (a) Quelle est la recette occasionnée par la vente de 500 coques ?
   (b) Pour quel nombre de coques fabriquées la recette est-elle de 1 300 euros ? de 2 000 euros ?
3. Étude du bénéfice.
   (a) Le bénéfice est la différence entre la recette et le coût. Quel est le bénéfice pour une production de 450 coques ?
   (b) Lorsque le bénéfice est positif on dit que l'entreprise est bénéficiaire. Dans quels cas l'entreprise est-elle bénéficiaire ?
4. Étude des variations des recettes.
   (a) Lorsque le nombre de coques produites augmente de 0 à 800, les coût vont croissants. Que peut-on dire des variations des recettes lorsque le nombre de coques produites augmente de 0 à 800 ?

(b) Proposez une explication possible à ces variations.
(c) Quel est la recette maximale que peut engendrer la vente des coques ? pour quelle nombre de coques fabriquées la recette est-elle maximale ?
(d) Quel nombre de coques faut-il recommander à l'entrepreneur de produire ?

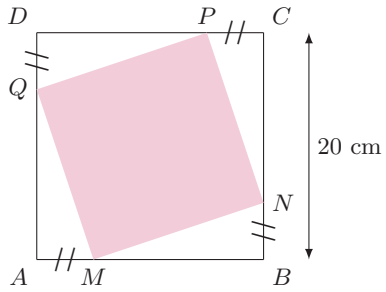
EXERCICE 12. Exercice 35 page 56 du manuel lelivrescolaire.fr.

EXERCICE 13. Exercice 41 page 57 du manuel lelivrescolaire.fr.

EXERCICE 14.

Dans un carré $ABCD$ de côté 20 cm, on inscrit un carré $MNPQ$ suivant le schéma ci-contre.

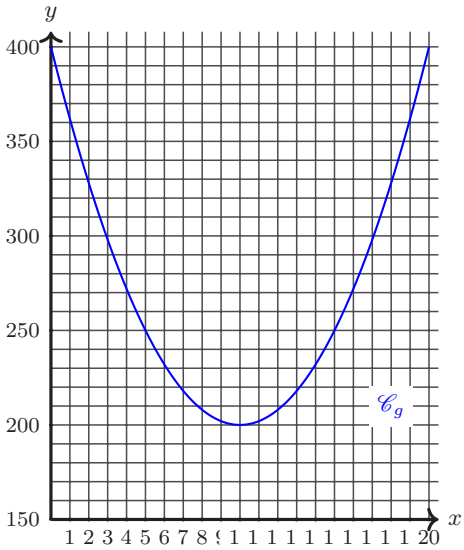
On pose $x = AM = BN = CP = DQ$.



Le but de cet exercice est de déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire du carré $MNPQ$ exprimée en cm^2, que nous noterons $g(x)$, dépasse 272 cm^2.

1. Déterminez le domaine de définition, $\mathscr{D}_g$ de g.
2. Démontrez que : $g(x) = 2x^2 - 40x + 400$, pour tout $x \in \mathscr{D}_g$.
3. Dressez le tableau de variation de la fonction g d'après sa représentation graphique donnée à l'**annexe 1**.
4. Précisez les extrema de la fonction g d'après le précédent tableau de variation.
5. Complétez le tableau de valeurs donné à l'**annexe 2** sans aucune justification.
6. Utilisez le graphique fourni en **annexe 1** pour conjecturer l'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x) > 272$.
7. On se propose de retrouver par le calcul les solutions de l'équation $g(x) = 272$.

(a) Prouvez que $g(x) = 272$ équivaut à $2x^2 - 40x + 128 = 0$.
(b) On note $f(x) = 2x^2 - 40x + 128$ pour tout x réel. Vérifiez que $f(x) = (8-2x)(16-x)$ pour tout nombre x réel.
(c) Résolvez l'équation $f(x) = 0$.


y
400
350
300
250
200
150
x
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
$\mathscr{C}_g$