Homographies.

Remarque : de nombreux méthodes et outils concernant les fonctions homographiques ont été vues dans la leçon traitant des fractions rationnelles.

I Exemple.

Exercice 1

Cet exercice à pour objet l'étude de la fonction numérique f définie par

$$f(x) = \frac{2x+1}{-x+1}$$

1. Déterminez le domaine de définition de f.
2. Tracez avec la calculatrice une représentation graphique de f. Dressez, d'après votre lecture graphique, le tableau de variation de f.
3. Étudiez le signe de f sur son domaine de définition ; vous présenterez le résultat sous forme d'un tableau.
4. Résolvez l'inéquation $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.
5. Résolvez l'équation $f(x) = 4$.

II Leçon.

Définition 1

Étant donnés a, b, c et d des nombres réels tels que

$$\left\{\begin{array}{l} ad - bc \neq 0 \\ c \neq 0 \end{array}\right.$$

la fonction

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{ax+b}{cx+d} \end{array}\right.$$

est appelée une *fonction homographique*.

Remarques.

1. Une fonction homographique peut être vue comme le quotient de deux fonctions affines (non proportionnelles).
2. Les fonctions constantes ne sont pas des fonctions homographiques (car alors $ad - cb = 0$).

3. La condition $ad - cb \neq 0$ (produit en croix) équivaut à dire que le tableau

a	b
c	b

   n'est pas de proportionnalité.
4. Les fonctions affines ne sont pas des fonctions homographiques (car alors $c = 0$). Pour des raisons de structures d'ensembles les fonctions affines sont parfois considérées comme des fonctions homographiques ; les fonctions homographiques qui ne sont pas des fonctions affines sont alors appelées des *fonctions homographiques propres*.
5. La fonction inverse est un cas particulier de fonction homographique ($a = 0$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0$ et $ad - cb = -1$). Les fonctions homographiques sont donc une généralisation de la fonction inverse.
6. Le terme d'*homographie* est normalement réservé à une classe de fonction, mais peut, par abus de langage être utilisé pour désigner des fonctions homographiques.

Proposition 1

Étant donné $f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ une fonction homographique, si $c \neq 0$ alors il existe une unique façon d'écrire f sous la forme

$$f(x) = \frac{\alpha}{x - \beta} + \gamma$$

avec α, β et γ des nombres réels.
Cette écriture unique est appelée la *forme canonique* de la fonction homographique.

Remarques.

1. La forme canonique n'est pas un attendu du programme scolaire.

Proposition 2

La courbe représentative d'une fonction homographique, qui est appelée une *hyperbole*, admet le point de coordonnées $(\beta; \gamma)$ pour centre de symétrie.

Remarques.

1. La droite d'équation $x = \beta$ est appelée une *asymptote verticale* de l'hyperbole. C'est un axe de symétrie de l'hyperbole.
2. La droite d'équation $y = \gamma$ est appelée une *asymptote horizontale* de l'hyperbole. C'est un axe de symétrie de l'hyperbole.

III Exercices.

Exercice 2

Résolvez les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $\dfrac{x+2}{x+4} > 0$,
2. $\dfrac{2x-3}{-x+5} < 0$,
3. $\dfrac{1}{2x-3} < \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3

Soit f la fonction homographique définie par

$$f(x) = \frac{3x+5}{x+2}$$

1. Déterminez l'ensemble de définition de f.
2. Démontrez que la forme canonique de f est $3 + \frac{-1}{x+2}$.
3. La forme canonique étant notée $\frac{\alpha}{x-\beta} + \gamma$, précisez les valeurs de α, β et γ.

Exercice 4

Soit f la fonction homographique définie sur $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+2}.$$

1. Tracez la courbe représentative de la fonction f avec la calculatrice.
2. En utilisant la courbe, dressez le tableau de variation de f.
3. Sans calcul comparez les nombres

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}+2} \quad \text{et} \quad z = \frac{1}{\sqrt{5}+2}$$