Forme développée.

Identifier une fonction polynomiale de degré deux.

Définition 1. On appelle *fonction polynomiale de degré 2* toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour laquelle il existe des réels a, b et c (a étant non nul) tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c$.

Remarques.

1. Notation : dans la suite de cette leçon a, b et c désigneront trois nombres réels avec $a \neq 0$.
2. La présentation de l'expression algébrique donnée dans la définition d'une fonction polynomiale de degré 2 est appelée la *forme développée*. Elle correspond à l'expression développée, ordonnée et réduite du polynôme.
3. Les nombres a, b et c sont appelés des *coefficients*.
4. a est appelé le *coefficient dominant*.
5. c est appelé le *terme constant*. Il joue le même rôle que l'ordonnée à l'origine des fonctions affines.
6. Les expressions aX^2, bX et c sont appelées des monômes.
7. L'écriture sous forme développée (réduite et ordonnée suivant les puissances décroissantes de x) est unique : c'est le principe d'identification des coefficients. Autrement dit deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont la même expression développée, réduite et ordonnée.
8. Nous utiliserons la forme développée pour identifier la fonction trinôme.

EXERCICE 1. Montrez que les fonctions suivantes (sauf une) sont bien des fonctions polynomiales de degré 2.

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$.
b) $h(x) = 2x + 13$.
c) $k(x) = x^2$.
d) $m(x) = 3(x-1)^2 - 2$.
e) $g(x) = 8x - 7 - 3x^2$.
f) $j(x) = 8x^2 - 3x + 5x + 2x^2 - 7$.
g) $l(x) = -2(x-1)(x+3)$.

Exercice 1.

a) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$ donc f est polynomiale de degré 2 avec $a = 3$, $b = -2$ et $c = 4$.
b) $h(x) = 2x + 13$ n'est pas une fonction polynomiale de degré 2 car $a = 0$. Les fonctions affines ne sont pas des fonctions polynomiales du second degré.
c) $k(x) = x^2$ est une fonction polynomiale de degré 2 avec $a = 1$, $b = 0$ et $c = 0$.
d) $m(x) = 3(x-1)^2 - 2$ qui est bien définie sur $\mathbb{R}$ n'est, a priori, pas une fonction polynomiale de degré 2.
m est une fonction polynomiale de degré 2 si et seulement si elle admet une écriture sous forme développée, réduite, avec un coefficient dominant non nul.
Déterminons la forme, développée, réduite et ordonnée de m.
Soit x un quelconque réel.

$$\begin{aligned} m(x) &= 3(x-1)^2 - 2 \\ &= 3(x^2 - 2x + 1) - 2 \\ &= 3x^2 - 6x + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ m(x) = 3x^2 - 6x + 1.}$$

Donc m est une fonction polynomiale de degré 2 (forme développée avec $a = 3$, $b = -6$, $c = 1$ et $a \neq 0$).

e) $g(x) = 8x - 7 - 3x^2$ est une fonction polynomiale de degré 2 avec $a = -3$, $b = 8$ et $c = -7$. Il y a bien les trois monômes mais pas dans l'ordre.

f) $j(x) = 8x^2 - 3x + 5x + 2x^2 - 7$ n'est *a priori* pas une fonction polynomiale de degré 2 mais si l'on réduit cette expression (on regroupe les termes de même puissance que x) alors on voit que c'est le cas. j est polynomiale de degré 2 avec $a = 10$, $b = 2$ et $c = -7$.

g) $l(x) = -2(x - 1)(x + 3)$ n'est *a priori* pas une fonction polynomiale de degré 2. Cependant en développant, réduisant, puis ordonnant : k est une fonction polynomiale de degré 2 avec $a = -2$, $b = -4$ et $c = 6$.

EXERCICE 2. Identifiez parmi les fonctions définies par les expressions suivantes, quelque soit x dans $\mathbb{R}$, les fonctions polynomiales de degré deux. Vous démontrerez que c'en sont effectivement.

a) $f_1(x) = 3x^2 - 4x + 1$

b) $f_2(x) = x^2 - 2x + 3$

c) $f_3(x) = -x^2 + 4$

d) $f_4(x) = x(3x - 1)$

e) $f_5(x) = 2x - 4$

f) $f_6(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 1$

g) $f_7(x) = 2(x - 1)^2 + 1$

h) $f_8(x) = \frac{2}{x^2}4x - 5$

i) $f_9(x) = 2x^2 - 3x - 6x + 8\,680$

j) $f_{10}(x) = 2x^2 - 6x^4 + 8$

k) $f_{11}(x) = 2x^2 - 6\sqrt{x} + 3$

l) $f_{12}(x) = (x + 2)(x - 6)$

m) $f_{13}(x) = (3x + 4)^2 - (2x - 1)^2$

n) $f_{14}(x) = 2(x - 4)^2 + 12$

Exercice 2.

a) Oui. $a = 3$, $b = -4$ et $c = 1$.

b) Oui. $a = 1$, $b = -2$ et $c = 3$.

c) Oui. $a = -1$, $b = 0$ et $c = 4$.

d) Oui. $a = 3$, $b = -1$ et $c = 0$.

e) Non. Fonction affine : $a = 2$, $b = -4$.

f) Oui. $a = \frac{1}{2}$, $b = 3$ et $c = -1$.

g) Oui. $a = 2$, $b = -4$ et $c = 3$.

h) Non. Homographie.

Courbe représentative.

Pour pouvoir décrire la courbe représentative de la fonction polynomiale de degré deux nous utiliserons le vocabulaire suivant.

Définition 2. La courbe représentative d'une fonction polynomiale de degré deux est appelée une *parabole*.

Si le coefficient dominant a est strictement positif ($a > 0$) alors nous dirons que la *parabole est orientée vers le haut*.

Si le coefficient dominant a est strictement négatif ($a < 0$) alors nous dirons que la *parabole est orientée vers le bas*.

Remarques.

1. Nous retiendrons que le coefficient dominant a indique l'orientation de la parabole.
2. Autrement dit à l'infini la fonction prend le signe de son coefficient dominant. Ou encore la parabole est orientée vers le haut si les branches se prolongent à l'infini vers le haut.
3. Il y a de nombreux exemples de modélisation avec la parabole en physique : voir ici ou ici.
4. Le point le plus haut ou le plus bas de la parabole est appelé *le sommet* de la parabole.
5. La parabole présente un axe de symétrie vertical passant par son sommet (nous y reviendrons en étudiant les variations de la fonction).

Forme canonique.

Trouver la forme canonique.

EXERCICE 3. *Recopiez en complétant par des nombres le raisonnement suivant :*

Si f désigne la fonction polynomiale de degré deux définie par $f(x) = 3x^2 - 12x + 22$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors en essayant de faire apparaître une identité remarquable nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x^2 - \dots x) + 22 \\ &= 3(x^2 - 2 \times x \times \dots) + 22 \\ &= 3(x^2 - 2 \times x \times \dots + 2^2 - \dots) + 22 \\ &= 3(x^2 - 2 \times x \times \dots + 2^2) + 3 \times \dots + 22 \\ &= 3(x-2)^2 + \dots \end{aligned}$$

Exercice 3.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x^2 - 4x) + 22 \\ &= 3(x^2 - 2 \times x \times 2) + 22 \\ &= 3(x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2 - 2^2) + 22 \\ &= 3(x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2) + 3 \times (-2^2) + 22 \\ &= 3(x-2)^2 + 10 \end{aligned}$$

Cette démarche est celle employée pour déterminer la forme canonique (voir ci-dessous) à partir de la forme développée. Elle est à connaître pour les élèves qui souhaitent poursuivre en filière scientifique.

Proposition 1. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax^2 + bx + c \end{array} \right.$ une fonction polynomiale de degré deux. Il est toujours possible de trouver des nombres réels α et β tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Démonstration. Démonstration à la Gauss : il suffit de choisir $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = c - \frac{b^2}{2a}$ et de vérifier que cela fonctionne en substituant.

Démonstration plus naturelle : on part de la forme développée et on essaie de factoriser en faisant apparaître une identité remarquable.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left[x^2 + 2 \times x \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{b}{a}\right)\right] + c \end{aligned}$$

Ici on truande pour faire apparaître une identité remarquable en ajoutant et en soustrayant la même quantité :

$$\begin{aligned}
f(x) &= a\left[x^2 + 2 \times x \times \left(\frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\
&= a\left[x^2 + 2 \times x \times \left(\frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c \\
&= a\left[x^2 + 2 \times x \times \left(\frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c \\
&= a\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
&= a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
&= a(x-\alpha)^2 + \beta
\end{aligned}$$

avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = c - \frac{b^2}{4a}$.

Remarques.

1. Cette expression algébrique d'une fonction polynomiale de degré 2 est appelée la *forme canonique*.
2. La réciproque de cette proposition (la forme canonique est l'expression d'une fonction polynomiale de degré 2) est immédiate en développant. Elle permet d'ailleurs de trouver les valeurs de a, b et c en fonction de α et β.
   Développons, réduisons et ordonnons la forme canonique.

$$\begin{aligned}
a(x-\alpha)^2 + \beta &= a[x^2 - 2 \times x \times \alpha + \alpha^2] + \beta \\
&= ax^2 - 2a\alpha x + a\alpha^2 + \beta \\
&= ax^2 + (-2a\alpha)x + (a\alpha^2 + \beta)
\end{aligned}$$

   La forme canonique est une fonction polynomiale de degré deux.

   Dorénavant lorsque vous rencontrerez la forme canonique d'un trinôme vous pourrez affirmer sans démonstration qu'il s'agit d'une fonction polynomiale de degré 2.
3. La formule $\alpha = -\frac{b}{2a}$ est à connaître car très pratique dans les exercices (et $\beta = f(\alpha)$). $f(\alpha)$ se calcule en utilisant la forme développée de f.

EXERCICE 4. Donnez les formes canoniques de la fonction polynomiale f définie sur $\mathbb{R}$ dans les cas suivants en procédant, si nécessaire, à une factorisation. Puis précisez les valeurs de a, α et β.

a) $f(x) = 2x^2 - 12x + 19$ b) $f(x) = x^2 + 1$ c) $f(x) = x^2 - 2x + 1$
d) $f(x) = -7x^2 - 14x + 3$

Exercice 4.

a) Écrivons f sous forme canonique.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 12x + 19 \\ &= 2(x^2 - 6x) + 19 \\ &= 2(x^2 - 2 \times x \times 3) + 19 \\ &= 2(x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 - 3^2) + 19 \\ &= 2(x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2) + 2 \times (-3^2) + 19 \\ &= 2(x-3)^2 + 1 \end{aligned}$$

$a = 2$, $\alpha = 3$ et $\beta = 1$.

b) Écrivons f sous forme canonique.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 1 \\ &= 1(x-0)^2 + 1 \end{aligned}$$

Quand $b = 0$ le trinôme est déjà sous forme factorisée.

$a = 1$, $\alpha = 0$ et $\beta = 1$.

c) Écrivons f sous forme canonique.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x + 1 \\ &= (x^2 - 2 \times x \times 1) + 1 \\ &= (x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2 - 1^2) + 1 \\ &= (x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2) - 1^2 + 1 \\ &= (x-1)^2 \end{aligned}$$

On pouvait aussi remarquer immédiatement une identité remarquable.

$a = 1$, $\alpha = 1$ et $\beta = 0$.

d) Écrivons f sous forme canonique.

$$\begin{aligned} f(x) &= -7x^2 + 4x + 3 \\ &= -7(x^2 + 2x) + 3 \\ &= -7(x^2 + 2 \times x \times 1) + 3 \\ &= -7(x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 - 1^2) + 3 \\ &= -7(x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2) - 7 \times (-1^2) + 3 \\ &= -7(x+1)^2 + 10 \end{aligned}$$

$a = -7$, $\alpha = -1$ et $\beta = 10$.

EXERCICE 5. Donnez la forme canonique de la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -2x^2 - 4x - 14 \end{array}$$

en utilisant les formules pour α et β.

Exercice 5. f est une fonction polynomiale de degré 2 avec $a = -2$, $b = -4$ et $c = -14$ donc elle admet une forme canonique.

Déterminons les coefficients de la forme canonique.

$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2\times(-2)} = -1$ et $\beta = f(\alpha)$.

Pour calculer $f(\alpha)$ on utilise la forme développée

$$\begin{aligned} &= -2\alpha^2 - 4\times\alpha - 14 \\ &= -2\times(-1)^2 - 4\times(-1) - 14 \\ &= -12 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-\alpha)^2 + \beta \\ &= -2(x-(-1))^2 + (-12) \end{aligned}$$

Quelque soit x réel $f(x) = -2(x+1)^2 - 12$.

EXERCICE 6. Mettre sous forme canonique chacune des fonctions polynômes du second degré ci-dessous.

1. $f(x) = (3x-6)^2 - 1$
2. $g(x) = (-2x-4)^2 + 5$
3. $h(x) = (4x+6)^2 + 3$
4. $l(x) = (-3x+7)^2 - 2$
5. $m(x) = 2(3x-12)^2 + 4$
6. $n(x) = \frac{1}{4}(-2x+8)^2 - 7$
7. $p(x) = -\frac{1}{3}(3x-5)^2 + 6$

Variations de fonctions polynomiales de degré deux.

EXERCICE 7. On étudie le sens de variation sur $]-\infty;3]$ de la fonction f définie par $f(x) = (x-3)^2 - 5$. Recopier et compléter en justifiant chaque étape.

Soient a et b deux réels tels que $a < b \leqslant 3$.

$a - 3 \dots b - 3 \dots 0$

$(a-3)^2 \dots (b-3)^2$

$(a-3)^2 - 5 \dots (b-3)^2 - 5$

$f(a) \dots f(b)$

Donc f est … sur …

Proposition 2. Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a(x-\alpha)^2+\beta \end{array}$. Si $a > 0$, alors le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variations de f	$+\infty$ $\searrow$	β	$\nearrow$ $+\infty$

Démonstration. Montrons que f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ \alpha[$.
Soient $x < y$ deux nombres choisis dans $]-\infty\ ;\ \alpha[$.
Montrons donc que $f(y) - f(x) < 0$.
Pour déterminer le signe d'une quantité il faut essayer de la factoriser.

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= a(y-\alpha)^2 + \beta - [a(x-\alpha)^2 + \beta] \\ &= a(y-\alpha)^2 - a(x-\alpha)^2 \end{aligned}$$

On factorise par a :

$$f(y) - f(x) = a[(y-\alpha)^2 - (x-\alpha)^2]$$

On reconnaît une identité remarquable qui permet de factoriser :

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= a\left([(y-\alpha) - (x-\alpha)] \times [(y-\alpha) + (x-\alpha)]\right) \\ &= a\left([y-x] \times [y+x-2\alpha]\right) \end{aligned}$$

Par hypothèse $a > 0$ et $y - x > 0$ donc $f(y) - f(x)$ est du même signe que $y + x - 2\alpha$. Or x et y appartiennent à $]-\infty\ ;\ \alpha[$, donc :

$$\begin{cases} x - \alpha < 0 \\ y - \alpha < 0 \end{cases}$$

et donc $x + y - 2\alpha < 0$.

Ainsi $f(y) - f(x) < 0$. Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ \alpha[$.

Remarques.

1. On déduit du tableau de variation que, si $a > 0$, les fonctions polynomiales de degré 2 admettent un minimum absolu égal à β qui est atteint pour $x = \alpha$.
2. Si $a < 0$, alors les variations de f sont contraires.
3. Les fonctions polynomiales de degré 2 admettent toujours un extremum. Si $a < 0$, alors β est un maximum.
4. L'axe de symétrie de la parabole a pour équation $x = \alpha$.
5. On peut retrouver la forme canonique à partir de la forme développée grâce aux formules :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha)$$

EXERCICE 8. Donnez les tableaux de variation sur l'intervalle I des fonctions définies par leur expression algébrique et précisez leurs éventuels extrema.

1. Pour tout x de $I = \mathbb{R}$, $f(x) = -3(x+4)^2 - 7$.
2. Quelque soit x choisi dans $I = [-5\ ;\ 5]$, $g(x) = -8x + 4x^2 + 7$.
3. $I =]-\infty\ ;\ 4]$ et : $\forall x \in I$, $h(x) = (x+3)^2 - (x-5)^2$.

Exercice 8.

1. Déterminons le tableau de variation de f.
   f est une fonction polynomiale de degré 2 donnée sous forme canonique avec $a = -3$, $\alpha = -4$ et $\beta = -7$.
   Comme $a < 0$ la parabole est orientée vers le bas.

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
Variations de f	$\nearrow$	-7	$\searrow$

D'après le tableau f admet un maximum absolu égale à -7 obtenu pour $x = -4$.

2. La fonction g est polynomiale de degré 2 donnée sous forme développée.
Recherchons la forme canonique de g.

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2 \times 4} = 1$$

et

$$\beta = g(\alpha) = g(1) = 3$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x) = 4(x-1)^2 + 3$.

Tableau de variation.
Comme $a > 0$ la parabole est orientée vers le haut et

x	-5		1		5
Variations de g	147	$\searrow$	3	$\nearrow$	67

car $g(-5) = 147$ et $g(5) = 67$.
D'après le tableau

g admet un minimum absolu égale à -7 obtenu pour $x = -4$ et g admet un maximum absolu égale à 147 qui est atteint pour $x = -5$.

3. h n'est *a priori* pas une fonction polynomiale de degré deux puisque n'est donnée ni sous forme développée ni sous forme canonique.
Identifions la nature de h.
En développant on obtient, pour tout $x \in I$: $h(x) = 16x + 36$.

h est une fonction affine.

Tableau de variation.
h est une fonction affine dont le coefficient directeur est $a = 16 > 0$ donc :

x	$-\infty$		4
Variations de h		$\nearrow$	100

car $h(4) = 100$.

h admet un maximum absolu égale à 100 qui est atteint pour $x = 4$.

EXERCICE 9. Déterminer les variations de la fonction polynôme du second degré h qui vérifie :

a) $h(3) = 6$ b) $h(6) = 2$ c) $h(9) = 6$

Sommet de la parabole.

EXERCICE 10. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -2(x+1)^2 + 7 \end{array} \right.$

Complétez le raisonnement suivant par des signes d'inégalités puis expliquez ce qui a été démontré.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Comme la fonction carrée est positive

$$(x+1)^2 \dots 0$$

d'où

$$-2(x+1)^2 \dots 0$$

Et donc

$$-2(x+1)^2 + 7 \dots 7$$

Autrement dit

$$f(x) \dots 7$$

De plus $f(\dots) = 7$ donc f admet un ... égale à ... qui est atteint pour $x = \dots$.

Proposition 3. Si f est une fonction polynomiale de degré 2 dont la forme canonique est $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors le sommet S de la parabole a pour coordonnées $S(\alpha; \beta)$.

Démonstration.

Remarques.

1. Autrement dit : une fonction polynomiale de degré 2 admet un extremum égale à β qui est atteint en $x = \alpha$.
2. Vous n'aurez plus à le redémontrer. La valeur β est le maximum si $a < 0$ et le minimum sinon.

EXERCICE 11. Déterminez les éventuels extrema des fonctions suivantes sur l'ensemble I.

1. $f(x) = -2(x+1)^2 - 6$, $I = \mathbb{R}$.
2. $g(x) = 3x^2 - 12x + 17$, $I = \mathbb{R}$.
3. $h(x) = -(x-4)^2 + 2$, $I = [0; 10]$.

EXERCICE 12. Déterminer les sens de variation. Il est possible de généré aléatoirement des données dans ces exercices.

a) Démontrer que la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2(x+4)^2 - 5$ est croissante sur $[-4; +\infty[$.

b) Sur quel intervalle la fonction h, définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -2(x-3)^2 + 6$ est-elle croissante ?

c) Démontrer que la fonction m, définie sur $\mathbb{R}$ par $m(x) = 3(x-4)^2 + 2$ est croissante sur $[4; +\infty[$.

d) Sur quel intervalle la fonction p, définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = -2(x+3)^2 - 4$ est-elle décroissante ?

e) On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4(x-7)^2 + 1$. Quel est son sens de variation sur $\mathcal{I} = [0; 7]$?

f) On considère la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2(x+1)^2 - 3$. Quel est son sens de variation sur $\mathcal{I} = [-1; 0]$?

g) On considère la fonction h, définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3(x+2)^2 + 1$. Quel est son sens de variation sur $\mathcal{I} = [-3; -2]$?

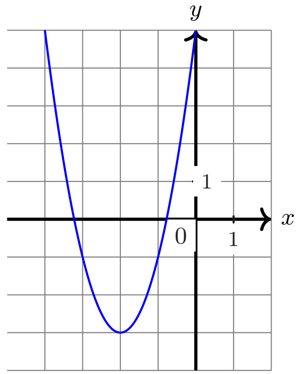
EXERCICE 13. Dresser les tableaux de variations des fonctions.

1. $k(x) = \frac{1}{4}\left(-2x - \frac{4}{7}\right)^2 - 7$
2. $f(x) = -2\left(\frac{2}{3}x - 1\right)^2 - \frac{2}{5}$

EXERCICE 14.

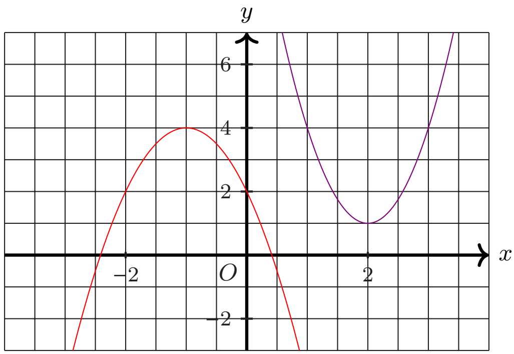
Trouvez la forme canonique de f sachant que quelque soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = 2(x - (-2))^2 + (-3).$$

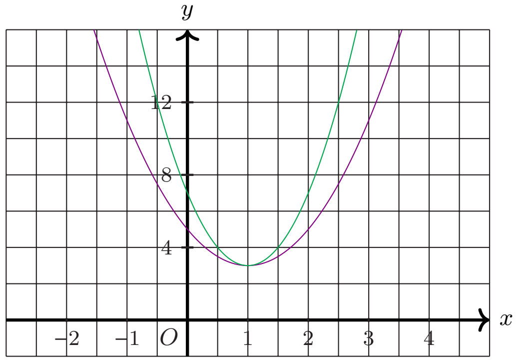


EXERCICE 15. Associer chaque courbe à la bonne fonction dans chacun des cas.

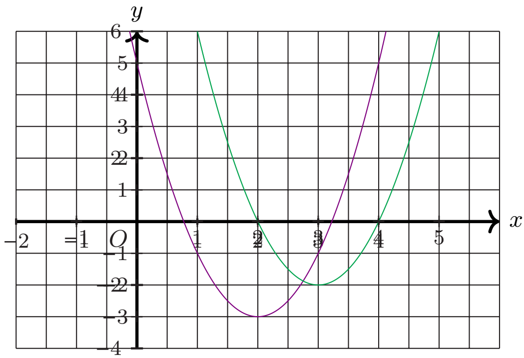
1. $f(x) = -2(x+1)^2 + 4$ et $g(x) = 3(x-2)^2 + 1$.



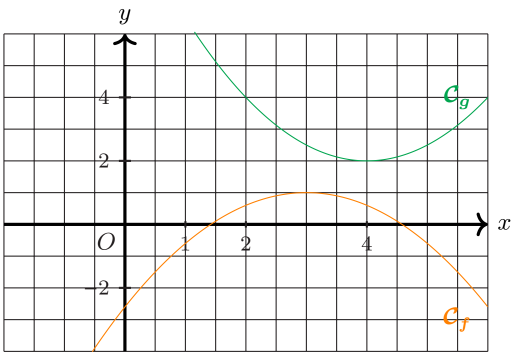
2. $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$ et $g(x) = 4(x-1)^2 + 3$.



3. $f(x) = 2(x-2)^2 - 3$ et $g(x) = 2(x-3)^2 - 2$.



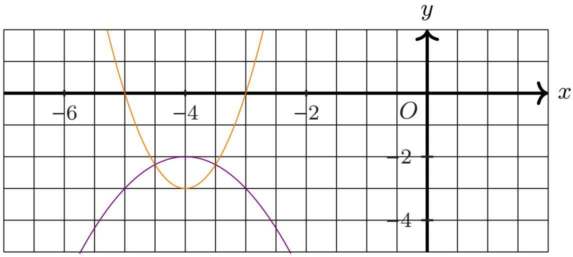
EXERCICE 16. À partir des représentations graphiques des trinômes f et g définis sur $\mathbb{R}$, dresser leurs tableaux de variations.



EXERCICE 17. Elsa utilise un logiciel pour représenter deux trinômes dans le même repère. Elle sait que :

$f(x) = 3x^2 + 24x + \ldots$ et $g(x) = -x^2 - \ldots x - 18$.

1. À partir des représentations graphiques, compléter les expressions des deux fonctions.



2. Déterminer graphiquement les coordonnées des extrema en précisant pour chacun si c'est un minimum ou un maximum.
3. Dresser les tableaux de variations des deux fonctions.
4. Quelle propriété est commune aux deux paraboles ?
5. Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$.

Forme factorisée.

Définition 3. Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$, et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax^2 + bx + c \end{array} \right.$.
La forme factorisée de la fonction polynomiale de degré 2 f est l'écriture (lorsque cela est possible) de son expression algébrique avec la présentation suivante $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont des nombres réels.

Remarques.

1. Toute fonction de la forme $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ est une fonction polynomiale de degré 2. Dorénavant lorsque vous rencontrerez la forme factorisée d'un trinôme vous pourrez affirmer sans démonstration qu'il s'agit d'une fonction polynomiale de degré 2.
2. Les nombres x_1 et x_2 sont appelés les *zéros* de la fonction ou les *racines* du trinôme.
3. La forme factorisée est particulièrement adaptée pour rechercher les solutions des équations du second degré ou pour étudier le signe des fonctions polynomiales de degré deux.

EXERCICE 18. Soit $f(x) = -2(x - 3)(x + 1)$ une fonction définie pour tout x réel.

1. Montrez que f est une fonction polynomiale de degré 2 dont vous préciserez les coefficients.
2. Calculez $f(3)$ et $f(-1)$.
3. Étudiez le signe de la fonction f.

EXERCICE 19. Donnez les tableaux de signes de la fonction f définie sur l'intervalle I lorsque :

a) $f(x) = 2(x + 10)(x - 15)$ et $I = \mathbb{R}$.
b) $f(x) = -(x - 3)(x - 8)$ et $I = [0; 10]$.
c) $f(x) = -2(x + 1)(x + 1)$ et $I = \mathbb{R}$.
d) $f(x) = 7\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{8}{3}\right)$ et $I =]-10; 20[$.
e) $f(x) = -5(x + 1)(x - 12)$ et $I = [0; 15]$.
f) $f(x) = \sqrt{2}(x - \pi)(x - \mathrm{e})$ et $I = \mathbb{R}$.

Exercice 19.

a) Déterminons le signe de f.

x	$-\infty$		-10		15		$+\infty$
2		$+$		$+$		$+$	
$x+10$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-15$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) Déterminons le signe de f.

x	0		3		8		10
-1		$-$		$-$		$-$	
$x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-8$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c) Déterminons le signe de f.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
-2		$-$		$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$-$	

Déterminons le signe de f.

x	-10		$\frac{3}{2}$		$\frac{8}{3}$		20
7	$\|$	$+$		$+$		$+$	$\|$
$x-\frac{3}{2}$	$\|$	$-$	0	$+$		$+$	$\|$
$x-\frac{8}{3}$	$\|$	$-$		$-$	0	$+$	$\|$
$f(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\|$

d) Déterminons le signe de f.

La difficulté réside dans le fait que l'une des racines est extérieure à l'ensemble de définition.

x	0		12		15
-5		$-$		$-$	
$x+1$		$+$		$+$	
$x-12$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	

e) Déterminons le signe de f.

x	$-\infty$		e		π		$+\infty$
-1		$-$		$-$		$-$	
$x-\pi$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-\mathrm{e}$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

e qui est appelé le *nombre d'Euler* ou la *constante de Néper* vaut approximativement 2,71828. Il est préprogrammé sur la calculatrice.

Trouver la forme factorisée à partir de la forme canonique.

EXERCICE 20. Soit f une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ dont la forme canonique est $f(x) = (x-2)^2 - 49$.

1. (a) Factorisez $f(x)$.
   (b) Déterminez les racines de f.
   (c) Étudiez le signe de f.
2. Essayez de répondre aux mêmes questions pour $g(x) = (x-2)^2 + 49$ et $h(x) = (x-2)^2$

Exercice 20.

1. (a) Factorisons $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)^2 - 49 \\ &= (x-2)^2 - 7^2 \\ &= [(x-2)-7] \times [(x-2)+7] \\ &= (x-2-7)(x-2+7) \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = (x-9)(x+5)}$$

   (b) Déterminons les racines de f.

Rechercher les racines c'est chercher les valeurs de x qui annulent f. Or f étant une fonction polynomiale de degré deux il faut se ramener à une équation produit. Nous utiliserons donc la forme factorisée de f.

D'après la question précédente

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (x-9)(x+5) = 0 \\ &= x - 9 = 0 \text{ ou } x + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 9 \text{ ou } x = -5 \end{aligned}$$

L'ensemble des racines de f est $\mathcal{S} = \{-5; 9\}$.

(c) Étudions le signe de f.
Là encore la forme factorisée se prête aisément à la construction du tableau de signe.

x	$-\infty$		-5		9		$+\infty$
$x-9$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Pour g il n'est pas possible de factoriser et la fonction n'admet pas de zéro. g est clairement strictement positive.
h est déjà factorisée et elle admet une racine à savoir 2. h est strictement positive sauf en 2 ou elle s'annule.

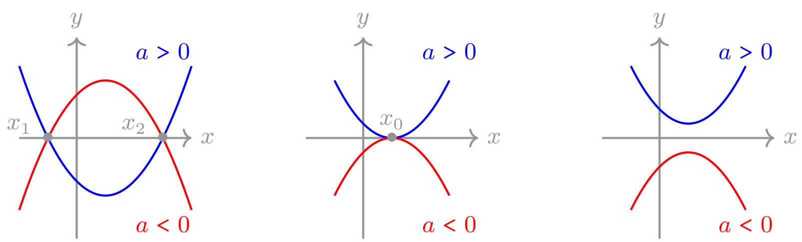
Remarques.Le précédent exercice illustre les faits suivants.

1. Il n'est pas toujours possible de factoriser une fonction polynomiale de degré deux. $X^2 + 1$ n'est typiquement pas factorisable dans $\mathbb{R}$.
2. Une fonction polynomiale de degré deux peut avoir 0, ou 1 ou 2 racines.
3. La méthode employée dans l'exercice précédent sera généralisée et formalisée en classe de première.

Interprétation graphique.

Trouver la forme factorisée d'une fonction trinôme revient à chercher ses racines. Or dire que x_0 est une racine du trinôme f revient à dire que $f(x_0) = 0$. Graphiquement cela signifie que la parabole représentant f coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse x_0.

Nous voyons graphiquement que trois situations vont se présentées :

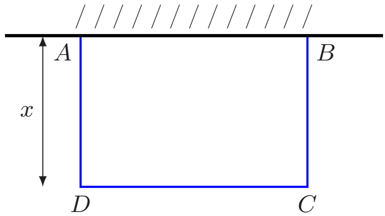


Ainsi l'équation $f(x) = 0$ aura donc 2 ou 1 ou aucune solutions.
À chacune des courbes ci-dessus est associée un tableau de signe distinct.

Exercices.

EXERCICE 21.

Un exercice très classique : l'enclos.
On souhaite réaliser un enclos de forme rectangulaire avec une clôture de 100 m l'un des côtés de l'enclos étant formé d'un mur de pierre.
On désigne par x les longueurs des deux côtés perpendiculaires au mur.
L'objectif est de rendre la surface délimitée par l'enclos maximale.



1. Exprimez en fonction de x la longueur du troisième côté de l'enclos.
2. Exprimez en fonction de x l'aire $f(x)$ de la surface délimitée par l'enclos et le mur.
3. Résolvez l'inéquation $f(x) \geq 0$. Déduisez-en les seules valeurs de x susceptibles de nous intéresser.
4. Démontrez que pour tout $x \in [0; 100]$, $f(x) = 1\,250 - 2(x - 25)^2$.
5. Pour quelles valeurs de x la fonction f atteint-elle sont maximum ?
6. Donnez alors le dimensions de la surface délimité.

EXERCICE 22.

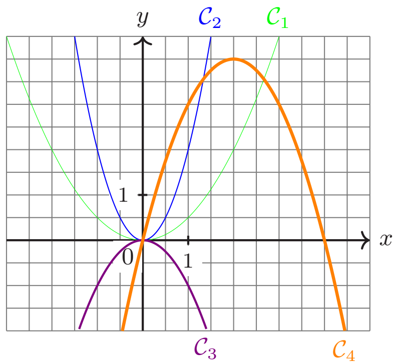
Les fonction indiquées sont définies sur $\mathbb{R}$.
Attribuez sa courbe à chacune d'elle.

$f_1 : x \mapsto -x^2$

$f_2 : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$

$f_3 : x \mapsto 2x^2$

$f_4 : x \mapsto x(4 - x)$



EXERCICE 23.

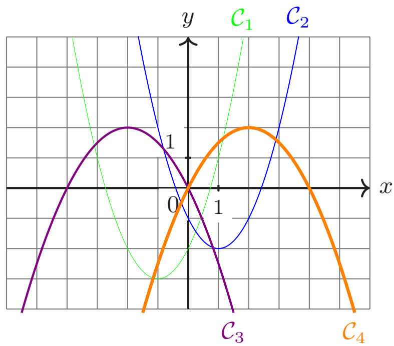
Les fonctions indiquées sont définies sur $\mathbb{R}$.
Attribuez sa courbe à chacune d'elles.

$f_1 : x \mapsto x^2 + 2x - 2$

$f_2 : x \mapsto -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$

$f_3 : x \mapsto (x - 1)^2 - 2$

$f_4 : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$



Exercice 23.

f_1 est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme factorisée. $a = 1 > 0$ donc la parabole est orientée vers le haut. $c = -2$ donc la parabole coupe l'axe des ordonnées à l'ordonné -2. La courbe représentative de f_1 est donc $\mathcal{C}_1$.

f_2 est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme canonique. $a = -\frac{1}{2}$ donc la parabole est orientée vers le bas. $\alpha = 2$ et $\beta = 2$ donc le sommet de la parabole a pour coordonnées $(2; 2)$. La courbe représentative de f_2 est $\mathcal{C}_4$.

f_3 est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme canonique. $a = 1$ donc la parabole est orientée vers le haut. $\alpha = 1$ et $\beta = -2$ donc le sommet de la parabole a pour coordonnées $(1; -2)$. La courbe représentative de f_3 est $\mathcal{C}_2$.

EXERCICE 24. Démontrez que $(\sqrt{3} + \sqrt{4})^2 + 1 < (\sqrt{3} + \sqrt{4} + 1)^2 + 1$.

EXERCICE 25. Les fonctions considérées ici sont définies sur $\mathbb{R}$. Pour chacune d'elles, dressez son tableau de variation.

a) $f(x) = 5 - 2(x + 1)^2$.

b) $g(x) = 2(1 - 3x)(1 - x)$.

c) $u(t) = \frac{1}{4} - t^2$.

d) $v(t) = \frac{1}{3}(1 - t^2)$.

Exercice 25.

a) Dressons le tableau de variation de f.

$f(x) = -2(x + 1)^2 + 5$ est une fonction polynomiale de degré 2 donnée sous forme canonique avec $a = -2$, $\alpha = -1$ et $\beta = 5$.

$a = -2 < 0$ donc la parabole est orientée vers le bas.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	5	$\searrow$	

b) g n'est pas une fonction dont nous pouvons donner le tableau de variation. Développons son expression pour essayer de l'identifier.

$$\begin{aligned} g(x) &= 2(1-3x)(1-x) \\ &= 2\left[1\times 1 + 1\times(-x) + (-3x)\times 1 + (-3x)\times(-x)\right] \\ &= 2\left[1 - x - 3x + 3x^2\right] \\ &= 2(1-4x+3x^2) \\ &= 2\times 1 + 2\times(-4x) + 2\times 3x^2 \\ &= 6x^2 - 8x + 2 \end{aligned}$$

Ainsi g est une fonction polynomiale de degré deux dont nous avons la forme développée. Or pour trouver le tableau de variation il nous faut le forme canonique donc
Déterminons la forme canonique de g.
g est une fonction polynomiale de degré deux avec $a = 6$, $b = -8$ et $c = 2$.

1. $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2\times 6} = \frac{2}{3}$.
2. $\beta = g(\alpha) = g\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}$.

La forme canonique de g est $g(x) = 6\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3}$.

Dressons le tableau de variation de g.
g est une fonction polynomiale de degré eux donnée sous forme canonique avec : $a = 6$, $\alpha = \frac{2}{3}$ et $\beta = -\frac{2}{3}$.
$a = 6 > 0$ donc la parabole est orientée vers le haut.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$	$-\frac{2}{3}$	$\nearrow$	

c) Dressons le tableau de variation de u.
$u(t) = -t^2 + \frac{1}{4} = -1\times(t-0)^2 + \frac{1}{4}$
u est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme canonique avec $a = -1$, $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{1}{4}$.
$a = -1 < 0$ donc la parabole est orientée vers le bas.

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$u(t)$		$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	

d) Déterminons le tableau de variation de v.

$v(t) = \frac{1}{3}(1-t^2) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times (-t^2) = -\frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(t-0)^2 + \frac{1}{3}$.

v est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme canonique avec $a = -\frac{1}{3}$, $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{1}{3}$.

$a = -\frac{1}{3} < 0$ donc la parabole est orientée vers le bas.

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$v(t)$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$

EXERCICE 26. Une entreprise fabrique un article haut de gamme. Le coût de production mensuel en euros en fonction du nombre x d'articles fabriqués est : $C(x) = x^3 - 300x^2 + 25\,000x$. L'entreprise peut fabriquer au maximum 300 articles par mois et nous supposerons qu'elle les vend tous.

1. Le coût mensuel moyen de production d'un article lorsqu'on en produit x (non nul) est $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$.
   (a) Vérifiez que $C_m(x) = (x-150)^2 + 2\,500$.
   (b) Démontrez que le minimum de la fonction C_m est $2\,500$. Pour quelle production est-il atteint ?
2. Chaque article est vendu 8 900 €.
   (a) Déterminez le bénéfice mensuel $B(x)$ en fonction du nombre x d'articles fabriqués et vendus.
   (b) Le bénéfice mensuel moyen sur un article lorsqu'on en produit x (non nul) est $B_m(x) = \frac{B(x)}{x}$.
   Vérifiez que $B_m(x) = 6\,400 - (x-150)^2$.
   (c) Démontrez que $B_m(x) = -(x-230)(x-70)$.
   (d) Déduisez-en les productions pour lesquelles $B_m(x) \geq 0$.

Exercice 26.

1. (a) En développant $(x-150)^2 + 2500$ et en simplifiant $C_m(x) = \frac{x(x^2-300x+25000)}{x} = x^2 - 300x + 25000$.
   (b) Avec la forme canonique obtenue à la question précédente nous dressons l tableau de variation et lisons le minimum.
2. (a) $B_m(x) = \frac{B(x)}{x} = \frac{8900x-(x^3-300x^2+25000x)}{x} = -x^2 + 300x - 16100$. Et en recherchant la forme canonique de cette dernière expression nous obtenons le résultat souhaité.
   (b) Nous développons $-(x-230)(x-70)$ et nous retrouvons bien l'expression développée de la question précédente.
   (c) Il faut dresser le tableau de signe est identifier les parties de l'ensemble de définition pour lesquelles B_m est positive.

Exercice 26.

1. (a) Pour démontrer que $A = B$ nous allons procédé en deux temps : d'abord démontré que $A = C$ puis que $B = C$.

   Déterminons l'expression algébrique de $C_m(x)$.
   Soit $x \in]0; 300]$.

$$
\begin{aligned}
C_m(x) &= \frac{C(x)}{x} \\
&= \frac{x^3 - 300x^2 + 25\,000x}{x} \\
&= \frac{x^3}{x} - \frac{300x^2}{x} + \frac{25\,000x}{x} \\
&= x^2 - 300x + 25\,000
\end{aligned}
$$

Nous remarquons que C_m est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme développée.

Vérifions que la forme canonique proposée par l'énoncé est effectivement celle de C_m.
Soit $x \in]0; 300]$.

$$
\begin{aligned}
(x - 150)^2 + 2\,500 &= x^2 - 2 \times x \times 150 + 150^2 + 2\,500 \\
&= x^2 - 300x + 150^2 + 2\,500 \\
&= x^2 - 300x + 25\,000
\end{aligned}
$$

> Quelque soit $x \in]0; 300]$, $C_m(x) = (x - 150)^2 + 2\,500$.

(b) Déterminons le minimum de C_m.
Pour cela construisons le tableau de variation de C_m sur $[0; 300]$.
D'après la question précédente C_m est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme canonique avec : $a = 1$, $\alpha = 150$ et $\beta = 2\,500$.
$a = 1 > 0$ donc la parabole est orientée vers le haut.

x	0		150		300
$C_m(x)$	‖	↘	2 500	↗	25 000

D'après le tableau de variation nous pouvons affirmer que

> C_m admet un minimum qui est 2 500 €, et ce minimum est atteint pour une production de 150 articles.

2. (a) Déterminons le bénéfice moyen.
Soit $x \in]0; 300]$.
Par définition du bénéfice $B(x) = R(x) - C(x)$, $R(x)$ désignant la recette pour x articles.
Chaque article étant vendu 8 900 €, par proportionnalité : $R(x) = 8\,900x$.
D'où

$$
\begin{aligned}
B(x) &= 8\,900x - \left[x^3 - 300x^2 + 25\,000x\right] \\
&= 8\,900x - x^3 + 300x^2 - 25\,000x \\
&= -x^3 + 300x^2 - 25\,000x + 8\,900x \\
&= -x^3 + 300x^2 - 16\,100x
\end{aligned}
$$

> Quelque soit $x \in [0; 300]$, $B(x) = -x^3 + 300x^2 - 16\,100x$.

(b) Vérifions que $B_m(x) = 6\,400 - (x-150)^2$.
Déterminons une expression de B_m.
Soit $x \in]0;300]$.

$$\begin{aligned} B_m(x) &= \frac{B(x)}{x} \\ &= \frac{-x^3+300x^2-16\,100x}{x} \\ &= -\frac{x^3}{x}+\frac{300x^2}{x}-\frac{16\,100x}{x} \\ &= -x^2+300x-16\,100 \end{aligned}$$

B_m est une fonction polynomiale de degré deux présentée ici sous forme développée avec $a=-1$, $b=300$ et $c=-16\,100$. Déterminons sa forme canonique.

i. $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{300}{2\times(-1)} = 150$.

ii. $\beta = f(\alpha) = f(150) = 6\,400$.

Donc

$$\boxed{\text{quelque soit } x \in]0;300],\ B_m(x) = -(x-150)^2 + 6\,400.}$$

(c) Démontrons que $B_m(x) = -(x-230)(x-70)$.
Soit $x \in]0;300]$.

$$\begin{aligned} -(x-230)(x-70) &= -\left[x\times x + x\times(-70) + (-230)\times x + (-230)\times(-70)\right] \\ &= -[x^2-70x-230x+16\,100] \\ &= -[x^2-300x+16\,100] \\ &= -x^2+300x-16\,100 \end{aligned}$$

Nous reconnaissons la forme développée de B_m trouvée à la question précédente donc

$$-(x-230)(x-70) = B_m(x)$$

$$\boxed{\text{Quelque soit } x \in]0;300],\ B_m(x) = -(x-230)(x-70).}$$

(d) Étudions le signe de B_m.
Pour étudier le signe d'une fonction nous utilisons sa forme factorisée.
D'après la question précédente si $x \in]0;300]$ alors $B_m(x) = -(x-230)(x-70)$.

i. $f(x) = x - 230$ est une fonction affine avec $a=1$ et $b=-230$.
Le coefficient directeur de f est $a = 1 > 0$ et f s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{-230}{1} = 230$.

ii. $g(x) = x - 70$ est une fonction affine avec $a=1$ et $b=-70$.
Le coefficient directeur de g est $a = 1 > 0$ et g s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{-70}{1} = 70$.

Donc

x	0		70		230		300
-1		$-$		$-$		$-$	
$x-230$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-70$		$-$	0	$+$		$+$	
$B_m(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Nous en déduisons que pour que l'entreprise réalise un bénéfice moyen (positif) il faut produire entre 70 et 230 articles.

EXERCICE 27. Une entreprise fabrique un produit. Pour une période donnée, le coût total de production, en euros, est donné en fonction du nombre q d'articles fabriqués par : $C(q) = 2q^2 + 10q + 900$, avec $0 < q < 80$. Tous les articles sont vendus. En euros, la recette total est $R(q) = 120q$ et le bénéfice total est $B(q) = R(q) - C(q)$.

1. Démontrez que B est une fonction polynomiale de degré 2 dont vous préciserez les coefficients.
2. Démontrez que, quelque soit $q \in]0;80[$, $B(q) = -2\left(q - \frac{55}{2}\right)^2 + \frac{1225}{2}$.
3. Démontrez que, quelque soit $q \in]0;80[$, $B(q) = -2(q-10)(q-45)$.
4. La production est rentable lorsque $B(q) > 0$. Déterminez les quantités pour lesquelles la production est rentable.
5. Déterminez les bénéfices maximum et minimum.

EXERCICE 28. Une entreprise fabrique des poutres métalliques qu'elle vend 2,3 milliers d'euros la tonne. Les coûts de production s'expriment en fonction du tonnage x produit ($x \geq 0$) par : $C(x) = 0{,}4x^2 - 4{,}1x + 0{,}8$.

1. Exprimez en milliers d'euros, le prix de vente $P(x)$ en fonction de x.
2. Le bénéfice $B(x)$ est la différence entre le prix de vente et les coûts de production.
   (a) Exprimez $B(x)$ en fonction de x.
   (b) Déduisez-en le tableau de variation de la fonction bénéfice et le bénéfice maximal espéré.
   (c) Évaluez graphiquement, sur votre calculatrice, le tonnage à produire afin de réaliser un bénéfice positif.

EXERCICE 29. Le propriétaire d'un cinéma de 1 000 places estime, pour ses calculs, qu'il vend 300 billets à 7 € par séance. Il a constaté qu'à chaque fois qu'il diminue le prix du billet de 0,1 €, il vend 10 billets de plus. Il engage une campagne de promotion.

1. Il décide de vendre le billet 5 €.
   (a) Combien y aura-t-il de spectateurs pour une séance ?
   (b) Quelle est alors la recette pour une séance ?
2. À quel prix devrait-il vendre le billet pour remplir la salle ? Quel est votre commentaire ?
3. Le propriétaire envisage de proposer x réductions de 0,1 €
   (a) Quel est alors le prix d'un billet en fonction de x ?
   (b) Exprimez en fonction de x le recette, notée $r(x)$, pour une séance et vérifiez que $r(x) = -x^2 + 40x + 2\,100$.
   (c) Donnez le tableau de variation de la fonction r sur l'intervalle $[0;70]$.
   (d) Déduisez-en la recette maximale, le prix du billet et le nombre de spectateurs de cette séance.

EXERCICE 30. Soit f un trinôme dont les racines sont 4 et 5. Donnez la forme développée de f sachant que $f(2) = 6$.

Exercice 30. Exploitons une par une les informations données par l'énoncé.

Si f est trinôme dont les racines sont 4 et 5 alors il existe un nombre a réel tel que $f(x) = a(x-4)(x-5)$.

De plus

$$\begin{aligned} f(2) = 6 &\iff a(2-4)(2-5) = 6 \\ &\iff -6a = 6 \\ &\iff \frac{-6a}{-6} = \frac{6}{-6} \\ &\iff a = -1 \end{aligned}$$

Ainsi la forme factorisée de f est

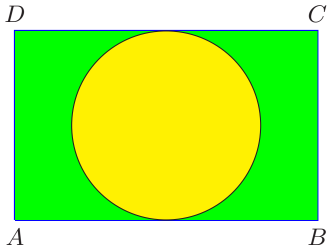
$$f(x) = -(x-4)(x-5)$$

Développons cette expression.

$$\begin{aligned} -(x-4)(x-5) &= -\left[x \times x + x \times (-5) + (-4) \times x + (-4) \times (-5)\right] \\ &= -[x^2 - 5x - 4x + 20] \\ &= -(x^2 - 9x + 20) \\ &= -x^2 + 9x - 20 \end{aligned}$$

La forme développée de f est $f(x) = -x^2 + 9x - 20$.

EXERCICE 31.



Le drapeau rectangulaire $ABCD$ a pour centre O, une longueur fixe $AB = 8$ et une largeur AD variable ; le cercle de centre O est tangent à deux cotés du rectangle. Comment fixer la largeurAD pour que la partie verte et la partie jaune aient la même aire ?

Il est possible d'aborder le problème de différentes façons.

1. Conjectures.
   Avec un logiciel de géométrie dynamique il est possible de représenter la situation et de trouver une valeur approchée du résultat.
2. Résolution algébrique.
   — Choix d'une variable. La longueur AD qui est variable et dont nous cherchons une valeur particulière semble tout indiquée comme variable x.
   — Valeurs possibles pour x.
   $x \in [0; 8]$ car au-delà de 8 l'aire du cercle ne changerait plus.
   — Mise en équation.
   L'aire du cercle est $\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}x$.
   L'aire du rectangle dont nous avons ôté le cercle : $8x - \frac{\pi}{4}x$.
   Dire que les aires sont égalent signifie que x est solution de l'équation : (E) : $\frac{\pi}{4} = 8x - \frac{\pi}{4}x$.
   — Résolution de l'équation.
   il est possible a nouveau de conjecturer le résultat en recherchant avec la calculatrice des résolutions graphiques.

EXERCICE 32. Lorsqu'un projectile est lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse initiale de 245 m.s^{-1}, la distance d (en mètres) le séparant du point de départ et sa vitesse v (en m.s^{-1}) à un instant t (en secondes) compté à partir de l'instant du départ, sont donnés par

$$d(t) = 245t - \frac{1}{2} \times 9{,}8t^2 \quad v(t) = 245 - 9{,}8t$$

Déterminez

1. L'instant auquel le projectile est à son point culminant.
2. L'instant auquel il repasse au point de départ.
3. La hauteur du point culminant.
4. La vitesse du projectile au point culminant.
5. La vitesse du projectile au moment où il repasse au point de départ.

Exercice 32.

1. Déterminons à quel instant il atteint le point culminant.

   Le point culminant correspond à un maximum de d. Or d est une fonction polynomiale de degré deux dont on connaît la forme développée : $a = -\frac{1}{2} \times 9{,}8$, $b = 245$ et $c = 0$.

   Déterminons la forme canonique de d.

   (a) $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{245}{2\times\left(-\frac{1}{2}\times 9{,}8\right)} = 25$.

   (b) $\beta = d(\alpha) = 3\,062{,}5$

   Donc : $d(t) = -\frac{1}{2} \times 9{,}8\,(t-25)^2 + 3\,062{,}5$.

   Puisque $a = -\frac{1}{2} \times 9{,}8 < 0$ la parabole est orientée vers le haut et donc

t	0	25	$+\infty$
$d(t)$	0 ↗	$3\,062{,}5$	↘

   Par lecture du tableau de variation :

   $$\boxed{\text{L'objet est à son point culminant à l'instant } t = 25 \text{ s.}}$$

2. Déterminons l'instant ou il repasse au point de départ.

   Dire que le projectile repasse au point de départ signifie que $d(t) = 0$. résolvons cette équation.

   $$\begin{aligned} d(t) = 0 &\iff 245t - \frac{1}{2} \times 9{,}8t^2 = 0 \\ &\iff t\left(245 - \frac{1}{2} \times 9{,}8t\right) = 0 \\ &\iff t = 0 \text{ ou } 245 - \frac{1}{2} \times 9{,}8t = 0 \\ &\iff t = 0 \text{ ou } t = 50 \end{aligned}$$

   L'instant $t = 0$ correspond au départ donc

   $$\boxed{\text{le projectile repasse au point de départ au bout de 50 s.}}$$

3. D'après la démonstration apportée à la question 1

   $$\boxed{\text{la hauteur du point culminant est } 3\,062{,}5 \text{ m.}}$$

4. La vitesse du projectile au point culminant est

   $$\boxed{v(25) = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.}$$

5. La vitesse du projectile au moment où il repasse au point de départ est

EXERCICE 33. Un arrêté d'application du code de la route fixe la distance de freinage jusqu'à l'arrêt pour une voiture automobile en fonction de la vitesse par la formule

$$d = 0{,}75v^2 + 2{,}5v$$

v étant la vitesse exprimée en myriamètres par heure (i myriamètre représente 10 kilomètres). Quelle doit être la vitesse d'une voiture pour qu'elle s'arrête sur une distance 50 mètres ? Étudiez les variations de la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$v \mapsto 0{,}75v^2 + 2{,}5v$$

EXERCICE 34. Nous souhaitons résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 = -2x + 3$ sur $\mathbb{R}$.

1. En représentant graphiquement les fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = -2x + 3$ avec la calculatrice conjecturez le nombre de solutions de l'équation.
2. Donnez la forme canonique de la fonction trinôme $h(x) = x^2 + 2x - 3$.
   Rappel $\alpha = -\frac{b}{2a}$ *et* $\beta = h(\alpha)$.
3. Donnez la forme factorisée de h.
4. Résoudre l'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$ et conclure.

EXERCICE 35. Le nombre d'or φ est l'unique solution positive de l'équation $x^2 = x + 1$.

Partie A : valeur exacte du nombre d'or.

Nous noterons $f : x \mapsto x^2 - x - 1$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminez la forme canonique de f.
2. Déduisez-en, si possible , la forme factorisée de f.
3. Déterminez les racines de f. En particulier donnez une valeur exacte de φ.

Partie B : valeurs approchées du nombre d'or.

Nous souhaitons déterminer un encadrement à 10^{-3} près du nombre d'or.

1. Tracez sur la calculatrice la courbe représentative de la fonction f définie ans la partie A.
   Donnez un encadrement entre deux entiers consécutifs du nombre d'or.
2. Grâce au tableau de valeurs de la calculatrice avec des pas successivement de 0,1, 0,01 puis 0,001, déterminez un encadrement du nombre φ entre deux nombres dont la différence est inférieure ou égale à 0,001.
3. (a) Programmez dans votre calculatrice l'algorithme.
   (b) Analysez l'algorithme en
   — donnant le tableau de fonctionnement pour deux boucles du tant que,
   — précisant le rôle des différentes variables.
   — indiquant le rôle de cet algorithme.
   (c) Comment modifier le précédent algorithme pour obtenir une valeur approchée à 10^{-5} de φ ?

```
Variables : a, b, m
Traitement :
a prend la valeur 1
b prend la valeur 2
Tant que b − a > 0,001, faire
    m prend la valeur (a + b)/2
    Si m² − m − 1 > 0, alors
        b prend la valeur m
    Sinon
        a prend la valeur m
    Fin si
Fin Tant que
Afficher a
Afficher b
```