Valeurs approchées, encadrements.

Encadrements.

Définition 1. Soit x un nombre réel. On appelle *majorant* de x tout nombre a tel que $x \leqslant a$. On appelle *minorant* de x tout nombre réel b tel que $b \leqslant x$. On appelle *encadrement* de x la donnée d'un minorant et d'un majorant de x : $b \leqslant x \leqslant a$.

Exemples.

1. -4 est un minorant de 10^3.
2. -4 est un majorant de -10.
3. -12 et 3 forment un encadrement de -7 : $-12 \leqslant -7 \leqslant 3$.
4. On utilise notamment les encadrement pour les nombres irrationnels dont il est impossible de donner une valeur exacte. Considérons $\sqrt{2}$. Les nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre (croissance de la fonction racine carrée) : or $1^2 \leqslant \sqrt{2}^2 \leqslant 2^2$ donc $1 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 2$. Puis on réitère : $1{,}4^2 = 1{,}96$ et $1{,}5^2 = 2{,}25$ donc $1{,}4^2 \leqslant 2 \leqslant 2{,}25$ et donc $1{,}4 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1{,}5$. En itérant (un programme informatique) on peut obtenir un encadrement très précis de $\sqrt{2}$.

Remarques.

1. Selon les situations on pourra considérer des encadrements avec des inégalités strictes.

Règle de manipulations des encadrements.

Proposition 1. Soient a, b, x, a', b' et y des réels.

(i) Si $a \leqslant x \leqslant b$ et $a' \leqslant y \leqslant b'$ alors $a + a' \leqslant x + y \leqslant b + b'$.
(ii) Si $0 < a \leqslant x \leqslant b$ et $0 < b \leqslant y \leqslant b'$ alors $0 < aa' \leqslant y \leqslant bb'$.

Démonstration. Découle des règles sur les inégalités.

Remarques.

1. Il y a des résultats semblables avec des encadrements mêlant inégalités strictes et larges. Il faut prendre de réfléchir et le retrouver au cas par cas.
2. Les produits membres à membres d'inégalités ne sont possibles que si les nombres sont strictement positifs (confer exemples).
3. Les réciproques sont fausses.

Exemples.

1. Contre-exemples de produits avec nombres négatifs : $-3 \leqslant -2 \leqslant -1$ et $-4 \leqslant -3 \leqslant -2$ mais $-3 \times (-4) > (-2) \times (-3) > -1 \times (-2)$, $-1 \leqslant 0 \leqslant 1$ et $-2 \leqslant -1 \leqslant 0$ mais $-1 \times (-2) \nleqslant 0 \times (-1) \leqslant 1 \times 0$.
2. Encadrer $u+v$ et uv sachant que $1 \leqslant u \leqslant 12$ et $5 \leqslant v \leqslant 7$: $6 \leqslant u+v \leqslant 19$ et $5 \leqslant uv \leqslant 84$.
3. Encadre $\frac{u}{v}$ sachant que : $-1{,}120 < u < -1{,}118$ et $-4{,}111 < v < -4{,}110$. On a $\frac{u}{v} = \frac{-u}{-v}$ et $1{,}118 < -u < 1{,}120$ et $4{,}110 < v < 4{,}111$. Par stricte décroissance de la fonction inverse sur les positifs : $\frac{1}{4{,}111} < \frac{1}{-v} < \frac{1}{4{,}110}$. On en déduit : $\frac{1{,}118}{4{,}111} < \frac{u}{v} < \frac{1{,}120}{4{,}110}$.

EXERCICE 1. Encadrez $\sqrt{7}$ par des décimaux dont la différence est 0,01.
EXERCICE 2. Encadrez $\frac{x}{1-2x}$ sachant que $0{,}252 < x < 0{,}253$.
EXERCICE 3. Soit x un réel. On pose $a = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ et $b = \frac{2x}{1+x^2}$. Prouvez que a, b et $a^2 - b^2$ sont quel que soit x, admettent -1 pour minorant et 1 pour majorant.
EXERCICE 4. a et b sont deux réels tels que $1{,}73 \leqslant a \leqslant 1{,}75$ et $1{,}46 \leqslant b \leqslant 1{,}50$. Donnez un encadrement pour chacun des nombres.

a) $-2a+5$. b) a^2. c) $3a^2-2a+5$.
d) $-b$. e) $a-b$. f) $\frac{1}{b}$.
g) $\frac{a}{b}$.

Valeur absolue.

Confer la leçon sur valeur absolue.

Approximation.

Rappelons qu'un nombre décimal d est un nombre qui peut s'écrire $d = a \times 10^n$ où a et n sont des entiers relatifs. Dans la pratique (mathématiques appliquées) on ne peut utiliser que des nombres décimaux utilisant peu de chiffres. Avec la calculatrice notamment le nombre de chiffres est très limité. Il faut donc être capable de repérer ces nombres décimaux par rapport à d'autres nombres réels. Nous admettrons d'ailleurs ce résultat (densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$) : entre deux réels x et x' avec $x < x'$, il existe toujours un nombre décimal d tel que : $x < d < x'$. Ce résultat permet aussi d'affirmer que, pour x un nombre réel, quel que soit la précision $a > 0$ choisie , il existe des décimaux d et d' tels que : $x - a < d < x < d' < x + a$. Autrement dit on peut toujours trouver des valeurs décimales approchées par défaut, d, et par excès, d', de x et ce quelle que soit la précision désirée.

L'écriture scientifique d'un nombre (notation flottante normalisée) est particulièrment adaptée à l'écriture des nombres décimaux.

EXERCICE 5. Le côté c d'un carré mesure 20 cm à 5 mm près.

1. Encadrez c, puis l'aire a du carré (en cm^2).
2. Si on veut connaître a à 1 cm^2 près avec quelle précision faut-il mesurer c ?

EXERCICE 6.

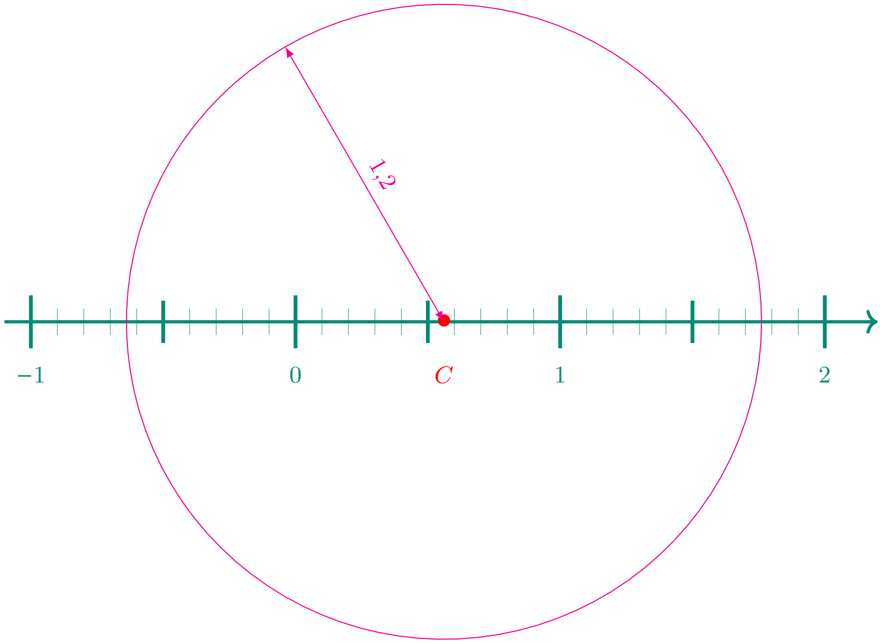
1. Montrez que, pour tout $x \neq -1$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x}$.
2. Montrez que pour tout $x \geqslant -\frac{1}{2}$, $0 \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant 2$. Déduisez-en que, pour $x \geqslant -\frac{1}{2}$, $0 \leqslant \frac{x^2}{1+x} \leqslant 2x^2$, puis que $1 - x$ est une valeur approchée de $\frac{1}{1+x}$ par défaut à $2x^2$ près.
3. À l'aide de ce qui précède donnez une valeur approchée par défaut de $\frac{1}{1{,}01}$ et de $\frac{1}{0{,}98}$ en indiquant la précision.

I Encadrer un réel.

La recherche d'une valeur approchée d'un nombre est contraire au désir de vérité absolue propre aux mathématiques. C'est pourquoi si nous acceptons, contraints et forcés, de ne pas avoir des valeurs exactes il faut que du moins nous limitions notre erreur.

Exemples.

1. Pour donner une valeur approchée de 0,561 considérons le point C d'abscisse 0,561.



* Valeurs approchées à 1 près.
  Le cercle magenta a un rayon de 1 et est centré sur le point d'abscisse 0,561.
  Toutes les abscisses des points de l'axe gradué, situés à l'intérieur du cercle, sont des valeurs approchées à 1 unité près de 0,561.
  Ainsi : 0, −0,2, 0,5, 1, 0,56, 1,2 et bien sûr, 0,561 lui-même, sont des valeurs approchées de 0,561 à une unité près.
* Valeurs approchées à 0,2 près.
  Le cercle vert a un rayon de 0,2 et est centré sur le point d'abscisse 0,561.
  Ainsi : 0,4, 0,5, 0,6 et 0,7 sont des valeurs approchées de 0,561 à 0,2 près.

Nous distinguerons parfois les *valeurs approchées par excès* (en prenant trop) et *les valeurs approchées par défaut* (en prenant insuffisamment) : 0,6, 0,7, 1,2 sont des valeurs approchées par excès de 0,561 à un près tandis que −0,2, 0 et 0,56 sont des valeurs approchées par défaut à 1 près.

Nous prendrons également l'habitude d'exprimer les distance non pas avec les cercles mais avec les valeurs absolues. Pour dire que 0,6 est une valeur approchées de 0,561 à 0,2 près nous écrirons : $|0{,}6 - 0{,}561| \leqslant 0{,}2$.

2.

14 est une valeur approchée de 20 000 000 mais c'est sans intérêt tant cette approximation est grossière. Nous voyons bien sur cet exemple qu'il est vain de parler de valeur approchée si nous ne sommes pas capable de limiter, de quantifier, l'erreur commise.

Nous ne pouvons pas donner exactement l'erreur commise car, sinon, nous connaîtrions la valeur exacte. Nous indiquons l'erreur maximale que nous commettons sous forme d'écart, de distance maximale, entre notre valeur approchée et la valeur exacte.

Pour parler de la distance entre les nombres nous utiliserons donc la valeur absolue.

Définition 2.
Soient $x \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $v \in \mathbb{D}$.

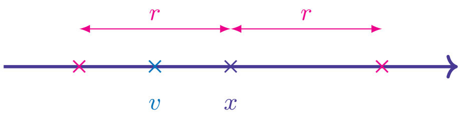
Nous dirons qu'un nombre décimal v est *une valeur approchée d'un nombre x à r près* si la distance entre v et x est inférieure à r. Autrement dit si :

$$|x - v| \leqslant r.$$

Remarques.

Remarques.

1. Pour se représenter la situation nous raisonnons géométriquement :



2. Nous voyons clairement sur le précédent schéma que $v \in [x - r; x + r]$. r peut être appelé le *rayon de l'intervalle* (par analogie avec le disque) et $2r$ est alors le diamètre ou l'*amplitude* de l'intervalle ou de l'encadrement.
3. Si la valeur approchée v est inférieure à la valeur exacte x nous dirons que v est *une valeur approchée par défaut*.

   De même si $x \leqslant v$ nous dirons que v est *une valeur approchée par excès*.
4. Un procédé simple pour obtenir une valeur approchée à 10^{-n}, avec $n \in \mathbb{N}$, consiste à arrêter son écriture décimale au n-ième chiffre après la virgule. Ce procédé est appelé *troncature*. Tronquer 1,23456 à 10^{-4} donne 1,2345. Tronquer $-1{,}23456$ à 10^{-3} donne $-1{,}234$.

Exemples.

1. Puisque $1{,}9 \in [2 - 0{,}5; 2 + 0; 5]$ nous pouvons dire que 1,9 est une valeur approchée de 2 à 0,5 près.

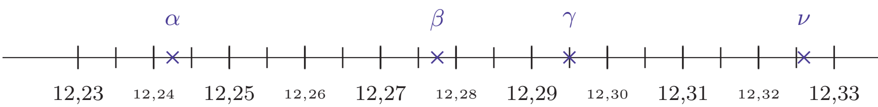
Définition 3.
Soient $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{D}$.

Nous dirons que v est *une valeur arrondie de x à 10^n près* si v est une valeur approchée de x à $\frac{1}{2} \times 10^n$ près et si $v \times 10^{-n}$ est un entier.

Remarques.

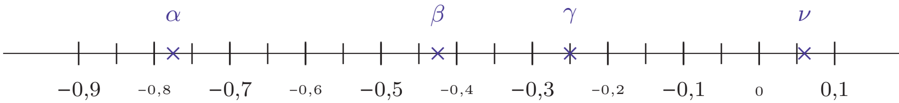
1. Nous retiendrons que l'arrondie est la plus proche des valeurs approchées par excès et par défaut.

II Exercices.



EXERCICE 7.

Donnez, pour α, β, γ et ν, un encadrement décimal d'amplitude 10^{-2}, des valeurs approchées par excès, par défaut et arrondies à 10^{-2} près.



EXERCICE 8.

Donnez, pour α, β, γ et ν, un encadrement décimal d'amplitude 10^{-1}, des valeurs approchées par excès, par défaut et arrondies à 10^{-1} près.

EXERCICE 9. Donnez un encadrement décimal de $\frac{2}{3}$ à 0,1 près, puis à 0,01 près, puis 0,001 près.

EXERCICE 10. Donnez, avec une précision de 10^{-4}, un encadrement décimal, des valeurs approchées par défaut et par excès et enfin une valeur arrondie de $\frac{11}{7}$.

EXERCICE 11. À l'aide de la calculatrice donnez

a) un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude 10^{-3},
b) une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} par défaut,
c) une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} par excès,
d) une valeur arrondie de $\sqrt{2}$ à 10^{-3},
e) une valeur arrondie de $-\sqrt{3}$ à 10^{-5},
f) une valeur arrondie de e à 10^{-4}.

EXERCICE 12. En physique on a mesuré une masse m et on donne comme résultat $m = 11{,}6$ kg. Le dernier chiffre est en fait inconnu à $\pm 0{,}5$ kg. Donnez un encadrement de m en kg et précisez sont amplitude.

EXERCICE 13. Donnez encadrement, valeurs approchées et arrondie du nombre α avec la précision ε.

a) $\alpha = 857{,}543$, $\varepsilon = 10^{-2}$.
b) $\alpha = -3{,}14159$, $\varepsilon = 10^{-4}$.
c) $\alpha = \pi + \sqrt{5}$, $\varepsilon = 0{,}001$.
d) $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\varepsilon = 0{,}0001$.
e) $\alpha = 23\,450\,000$, $\varepsilon = 10^{5}$.
f) $\alpha = 14$, $\varepsilon = 10^{-1}$.

EXERCICE 14.

1. À la Grecque. En considérant un disque de rayon 1 cm et des carrés, expliquez l'encadrement $3 < \pi < \frac{22}{7}$.
2. Pour calculer l'air d'un disque, les Égyptiens procédez ainsi : multiplier le diamètre par 8, diviser par 9 puis élever au carré. Quel résultat obtient-on pour un disque de rayon 1 cm ?
3. Comparer les deux résultats obtenus.

EXERCICE 15. La vitesse d'un satellite qui tourne autour de la Terre sur son orbite circulaire est donnée par la formule :

$$V = R\sqrt{\frac{g}{R+h}}$$

où R est le rayon de la Terre, g est l'accélération de la pesanteur d'environ 9,81 m/s^2 et h l'altitude du satellite. Calculez la vitesse du satellite an m/s puis en km/h pour une hauteur de 200 km ? de 50 000 km ?