Valeur absolue.

Définition et propriétés algébriques.

Définition 1. Soit x un réel. On appelle *valeur absolue de x* le plus grand des deux nombres x et $-x$. On note $|x| := \max\{x, -x\}$.

Exemples.

1. $|3| = 3$ car $3 \geqslant -3$ et donc $\max\{3, -3\} = 3$.
2. $|-3| = 3$ car $-3 \leqslant 3$ et donc $\max\{-3, 3\} = 3$.
3. $|0| = 0$.

Remarques.

1. Le plus souvent la valeur absolue est une entrave qui nous empêche d'avancer dans nos travaux c'est pourquoi nous essaierons le plus souvent d'obtenir des écriture sans valeur absolue.
2. Autrement dit il faut prendre la « version positive » du nombre, par exemple $|-3| = 3$, $|5| = 5$, $|0| = 0$.

EXERCICE 1. Donnez la valeur absolue de chacun des nombres suivants.

a) -1.	b) $\frac{2}{3}$.	c) $3{,}25$.	d) $-0{,}06$.
e) $-\frac{1}{7}$.	f) 10^3.	g) $-\sqrt{2}$.	h) $\sqrt{27}$.
i) $-\frac{2}{3}$.	j) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.	k) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.	l) 10^{-2}.
m) $\sqrt{2} - 1$.	n) $2 - \sqrt{5}$.	o) $\sqrt{13} - \sqrt{7}$.	p) $\sqrt{2} - \sqrt{5}$.

Proposition 1. Soit x un nombre réel.

(i) $|x| \geqslant 0$.
(ii) Si x est positif alors $|x| = x$.
(iii) Si x est négatif alors $|x| = -x$.
(iv) $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
(v) $|x| = |-x|$.
(vi) $|xy| = |x| \times |y|$.
(vii) $|x|^2 = |x^2| = x^2$.
(viii) $\sqrt{x^2} = |x|$.
(ix) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.
(x) $|x - y| \leqslant |x| + |y|$.
(xi) $||x| - |y|| \leqslant |x + y|$.

Démonstration.

* x et $-x$ sont opposés et le plus grand est le positif donc $|x|$ désigne un nopmbre positif.
* Si x est positif le maximum de x et de $-x$ est x car les nombres positifs sont supérieurs aux négatifs.
* De même, si x est négatif, alors $-x$ est positif et est donc plus grand que x.
* $|x| = 0 \iff \max\{x, -x\} = 0 \iff x = 0$ ou $-x = 0 \iff x = 0$.
* $|x| = \max\{x, -x\} = \max\{-(-x), -x\} = \max\{-x, -(-x)\} = |-x|$.
* Si x est positif et y est négatif alors $|xy| = -xy$ et $|x| \times |y| = x \times (-y) = -xy$. On raisonne semblablement dans les autres cas.
* En application du point précédent : $|x|^2 = |x^2|$. x^2 est positif donc $|x^2| = x^2$, d'après un point précédent.
* D'après le point précédent en appliquant la fonction racine carrée.
*
* Découle du précédent appliqué à x et $-y$.

* En appliquant l'inégalité triangulaire à $-x$ et $x+y$ on obtient $|x+y| \geqslant |y|-|x|$. On montre de même $|x+y| \geqslant |x|-|y|$. D'où $|x+y| \geqslant ||x|-|y||$.

Remarques.

1. La valeur absolue permet de définir une distance d sur $\mathbb{R}$: $d(x,y) = |x-y|$. Au collège la valeur absolue est souvent définie à partir de la distance entre les points associés aux nombres sur la droite numérique.
2. $|x+y| \leqslant |x|+|y|$. est appelée l'inégalité triangulaire.
3. $||x|-|y|| \leqslant |x+y|$ est appelée l'inégalité triangulaire inversée.
4. Le résultat sur les produits fonctionne évidemment sur les quotients : $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.
5. On a aussi : $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$.

EXERCICE 2. Calculez $||7|-|-3|-|-7\times 3||-|-2|$.

EXERCICE 3. Calculez en détaillant.

a) $A = |4|$. b) $B = |-1|$. c) $C = |0|$.
d) $D = |-5|$. e) $E = |25+75|$. f) $F = |49-27|$.
g) $G = |2-25|$. h) $H = |-23-18|$. i) $I = |-4(3-12)|$.
j) $J = |3-2\times 3^2|$. k) $K = 6|4-11|-45$. l) $L = |28-12|^2$.

Interprétation géométrique : distance.

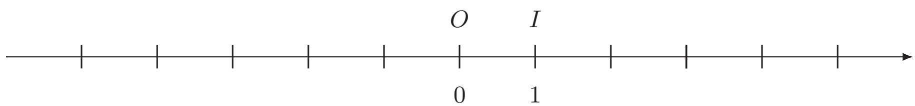
La valeur absolue $|x|$ que vous avez déjà rencontrée au collège vous fut présentée comme la distance, sur la droite numérique, entre 0 et x. Cette idée se généralise et permet de considérer la distance entre deux nombres.

Un écart est une différence (soustraction). Une distance est un nombre positif. Donc pour avoir la distance qui sépare deux nombre on prend la valeur absolue de leur différence. Ainsi la distance (sur la droite numérique) qui sépare 2 et 7 n'est pas $2-7$ mais $|2-7|$.

La valeur absolue est un outil commode pour noter la longueur séparant deux points de la droite numérique :

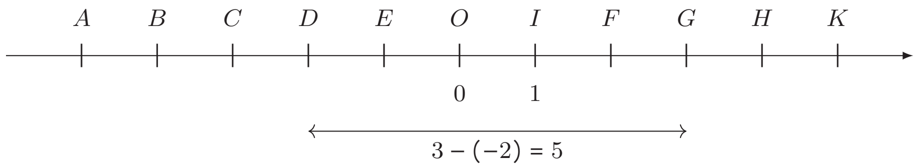
Ici : $AB = d(A,B) = |x_A - x_B| = |-1-3| = 4$.

EXERCICE 4. Placez sur la droite numérique les points proposés.



a) A tel que $AO = 4$. b) B tel que $OB = 2$. c) C tel que $CO = -2$.
d) D tel que $DO = 1$. e) E tel que $OE = 3$.

EXERCICE 5. On considère la droite numérique :



Exemple : la distance entre D et G est 5, $DG = 5$.
Lisez les distances proposées.

a) FH. b) IK. c) HI. d) DK.
e) BE. f) AI. g) EF. h) CH.
i) FB. j) OB. k) BH. l) HA.

EXERCICE 6. Déterminons les nombres de $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation.

a) $|x| = 7$. b) $|x| = \frac{2}{3}$. c) $|x| = \pi$.
d) $|x-1| = 1$. e) $|x-2| = 3$. f) $|x+1| = 1$.
g) $|x-1| = 0$. h) $|x+\sqrt{2}| = 1$. i) $|x+5| = 3$.
j) $|x-5| + 3 = 0$. k) $|2x-3| - 1 = 0$.

Encadrements et intervalles.

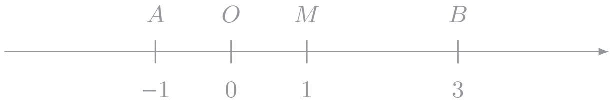
Proposition 2. Soit a un réel positif. Pour tout réel x, $|x| < a$ si et seulement si $-a < x < a$.

Démonstration. $|x| < a \Leftrightarrow \max\{x,-x\} < a \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x < a \\ -x < a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x < a \\ x > -a \end{array}\right. \Leftrightarrow -a < x < a$

Remarques.

1. C'est une traduction de l'inégalité avec la valeur absolue que nous utiliserons souvent pour se débarrasser de la valeur absolue.

Faisons de la géométrie sur la droite numérique en nous demandant comment trouver l'abscisse du milieu d'un segment $[AB]$.



Intuitivement, en tâtonnant, nous voyons que le milieu M sera le point d'abscisse $x_M = 1$. Comment l'obtenir par le calcul à partir des abscisses x_A et x_B des point A et B ? En faisant la moyenne des abscisses : $x_M = \frac{x_A+x_B}{2}$.

Définition 2. Soient a et b des réels avec $a < b$. Nous appellerons *centre de l'intervalle* $[a,b]$ le nombre $c = \dfrac{a+b}{2}$ et *rayon de l'intervalle* $[a,b]$ le nombre $\dfrac{b-a}{2}$.

Remarques.

1. Autrement dit le centre de l'intervalle est le milieu du segment délimité par les points d'abscisses a et b.

Proposition 3. Soient a et b des réels avec $a < b$. Si $x \in [a,b]$ (ou $a \leqslant x \leqslant b$) alors $\left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leqslant \frac{b-a}{2}$.

EXERCICE 7. Déterminez les nombres a et ε tels que la relation donnée soit équivalente à $|x-a| \leqslant \varepsilon$.

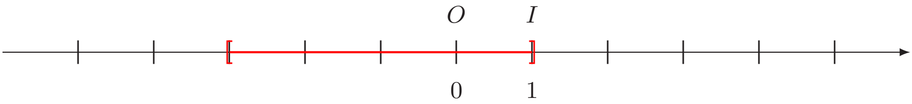
a) $x \in [1;3]$. b) $x \in [-1;4]$. c) $x \in [-6,-2]$.
d) $x \in \left[\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right]$. e) $x \in \left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$. f) $x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right]$.
g) $x \in [3{,}2;7{,}8]$. h) $x \in [-1{,}4;2{,}6]$. i) $x \in [-4{,}6;2{,}1]$.
j) $x \in [2{,}4\times10^{-4},5{,}5\times10^{-3}]$. k) $x \in [-3{,}8\times10^{-1},2{,}4\times10^{-2}]$.

EXERCICE 8. Déterminez les nombres a et b tels que la relation donnée soit équivalente à $x \in [a,b]$.

a) $2 \leqslant x-3 \leqslant 7$. b) $5 \leqslant 2x-1 \leqslant 9$. c) $-3 \leqslant -x+2 \leqslant 4$.
d) $-4 \leqslant -3x+1 \leqslant 5$. e) $-0{,}08 \leqslant 2x-1 \leqslant 2{,}04$. f) $0{,}24 \leqslant -4x+1 \leqslant 3{,}48$.
g) $3 \leqslant 0{,}1x-1 \leqslant 5$. h) $-1 \leqslant -0{,}2x+3 \leqslant 3$.

Proposition 4. Soient a un réel et ε un réel positif. Pour tout réel x, l'inégalité $|x-a| \leqslant \varepsilon$ signifie que x est un élément de l'ensemble $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$.
Démonstration. $|x-a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x-a < \varepsilon \Leftrightarrow a-\varepsilon < x < a+\varepsilon \Leftrightarrow x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon$.
EXERCICE 9. Dessinez sur une droite numérique l'intervalle fermé dont on donne le centre et le rayon.

Exemple : l'intervalle de centre -1 et de rayon 2 est représenté par



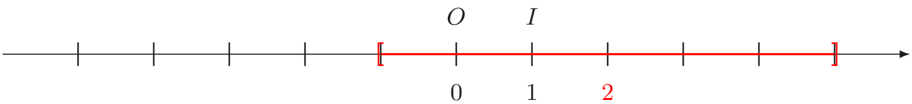
a) Centre 1 et rayon 5.
b) Centre 3 et rayon 2.
c) Centre -4 et rayon 2.
d) Centre -1 et rayon 4.
e) Centre 3 et rayon 3.
f) Centre 1 et rayon -3.
g) Centre 0 et rayon 2.
h) Centre -3 et rayon 5.

EXERCICE 10. Déterminez le centre, c, de l'intervalle proposé.

a) $[4;6]$.
b) $[3;227]$.
c) $[-8;12]$.
d) $[-139;-53]$.
e) $[-28;5]$.
f) $\left[4;\frac{1}{3}\right]$.
g) $\left[-\frac{2}{7};-\frac{9}{14}\right]$.
h) $\left[-\frac{2}{3};\frac{5}{13}\right]$.
i) $\left[\sqrt{17};-\frac{1}{3}\right]$.

EXERCICE 11. Dessinez sur la droite numérique l'ensemble des points d'abscisses x.

Exemple : si x vérifie $|2-x| \leqslant 3$ alors



a) $|3-x| \leqslant 1$.
b) $|1-x| \leqslant 4$.
c) $|4-x| \leqslant 2$.
d) $|x| \leqslant 4$.
e) $|x-5| \leqslant 2$.
f) $|x-3| \leqslant 2$.
g) $|x+3| \leqslant 2$.
h) $|x+1| \leqslant 4$.
i) $|x+4| \leqslant 1$.

EXERCICE 12. Résolvez les inéquations suivantes (en raisonnant géométriquement). Il faut donc donner l'ensemble des solutions.

a) $|4-x| \leqslant 3$.
b) $|-134-x| \leqslant 5$.
c) $|10^2-x| \leqslant -3$.
d) $\left|\frac{3}{7}-x\right| \leqslant \frac{2}{11}$.
e) $\left|x-10^3\right| \leqslant \frac{10^3}{2}$.
f) $|x+234| \leqslant 29{,}5$.
g) $|x+\sqrt{7}| \leqslant -12$.
h) $|-x-27| \leqslant 14$.

EXERCICE 13. Résolvez dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $|x| \leqslant 3$.
b) $|x| \geqslant 1$.
c) $|x| < \frac{1}{2}$.
d) $|2-x| \leqslant \frac{2}{3}$.
e) $|1-x| \geqslant \sqrt{2}$.
f) $|2x-1| \leqslant 1$.
g) $|3-2x| \leqslant \frac{1}{3}$.

Fonction valeur absolue.

Définition 3. On appelle *fonction valeur absolue* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (et même $\mathbb{R}_+$) qui à tout nombre réel x associe sa valeur absolue $|x|$.

Proposition 5. Tableau de signe de la fonction valeur absolue :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$	

Démonstration. Découle de la proposition énumérant des propriétés algébriques de la valeur absolue.

Proposition 6. Tableau de variations de la fonction valeur absolue :

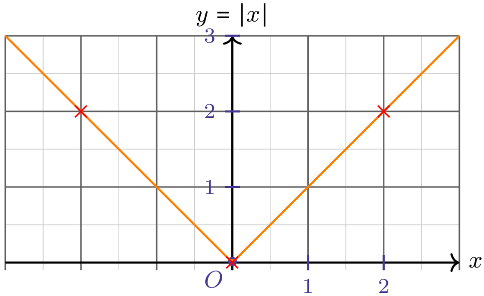
x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Démonstration. Si x est positif $|x| = x$. Autrement dit sur $\mathbb{R}_+$ valeur absolue se confond avec la fonction identité qui est strictement croissante.

Si x est négatif $|x| = -x$. Autrement dit sur $\mathbb{R}_-$ valeur absolue se confond avec la fonction $x \mapsto -x$ qui est strictement décroissante.

Remarques.

1. Les tableaux de variation et de signe nous donne des informations sur la représentation graphique de la valeur absolue mais surtout : $\begin{cases} x, \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ si } x < 0 \end{cases}$ Autrement dit c'est une fonction affine par morceaux : sur $\mathbb{R}_-^*$ c'est la fonction $x \mapsto -x$, sur $\mathbb{R}_+$ c'est la fonction identité $x \mapsto x$. Voici donc la représentation graphique de la fonction valeur absolue.



Proposition 7. La fonction valeur absolue est paire.

Démonstration.

* Valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0.

* $|-x| = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Des deux points précédents nous déduisons que valeur absolue est paire.

Exercices.

EXERCICE 14. Résolvez graphiquement.

a) x est équidistant de 0 et de 1.
b) x est plus près de 0 que de 1.

EXERCICE 15. Résolvez les équations suivantes (en raisonnant géométriquement). Il faut donc donner l'ensemble des solutions.

a) $|8 - x| = 5$.
b) $|-56 - x| = 10$.
c) $|3 \times 10^2 - x| = -5 \times 10^{234}$.
d) $\left|\dfrac{9}{5} - x\right| = \dfrac{8}{3}$.
e) $|x - 278| = 200$.
f) $|x + 15| = 18{,}1$.
g) $\left|x + 3\sqrt{2}\right| = -12$.
h) $|-x - 11| = 200$.

EXERCICE 16. Résolvez les inéquations suivantes (en raisonnant géométriquement). Il faut donc donner l'ensemble des solutions.

a) $|12 - x| \geqslant 25$.
b) $|-1 - x| \geqslant 7$.
c) $|10^{12} - x| \geqslant 3 \times 10^{12}$.
d) $\left|\dfrac{12}{11} - x\right| \geqslant \dfrac{1}{11}$.
e) $|x - 34| \geqslant \dfrac{1}{2}$.
f) $|x + 2456{,}4| \geqslant 12{,}34$.
g) $|x + \pi| \geqslant 12$.
h) $|-x - 56| \geqslant 4$.

EXERCICE 17. Tracez la courbe représentative de la fonction valeur absolue, $x \mapsto |x|$, sur $[-4; 4]$.

EXERCICE 18. Résolvez.

a) $|x| = 7$.
b) $|x| = -4$.
c) $|x - 4| = 1$.
d) $|1 - 2x| = 3$.
e) $|x - 5| < 2$.
f) $|x + 1| \geqslant 1$.

EXERCICE 19. Écrivez à l'aide de valeurs absolues puis en termes de distance, les inégalités suivantes.

a) $1 \leqslant x \leqslant 6$.
b) $-5 < x < -3$.

EXERCICE 20. Soient x et y deux nombres réels tels que : $|x| < 1$ et $|y| < 1$.

1. Montrez que $|xy| < 1$ et en déduire $1 + xy > 0$.
2. Effectuez $(1 - x)(1 - y)$ et $(1 + x)(1 + y)$.
3. Montrez que $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1$.

EXERCICE 21. En distinguant quatre cas suivant le signe de x et y, représentez dans le plan muni d'un repère l'ensemble des points M dont les coordonnées x et y vérifient $|x| + |y| = 1$.

EXERCICE 22. Démontrez que si $|x - 1| < 10^{-2}$, alors $|x^2 - 1| < 3 \times 10^{-2}$.

EXERCICE 23. Soient x et y deux réels. On pose $z = \frac{x+y}{2}$. Comparez $d(x,y)$ et $d(y,z)$. Montrez que z est compris entre x et y.

EXERCICE 24. Démontrez que si $|x - 2| < 0{,}01$, alors $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| < 3 \times 10^{-3}$.

EXERCICE 25. Déterminez les nombres a et b tels que la relation donnée soit équivalente à $x \in]a,b[$.

a) $|x - 3| < 1$.
b) $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{5}{2}$.
c) $|x + 1| < 2$.
d) $|-x + 1| < \frac{1}{2}$.
e) $|-x - 5| < 3$.
f) $|2x - 3| < 1$.
g) $|3x - 4| < \frac{1}{2}$.
h) $|4x - 1| < 5$.
i) $\left|\frac{x}{3} - 2\right| < 1$.
j) $\left|3 - \frac{x}{2}\right| < \frac{1}{2}$.
k) $\left|\frac{x}{4} - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{6}$.

EXERCICE 26. Une droite (d) est munie d'un repère $(O; \vec{i})$. A et B sont les points de (d) d'abscisses respectives -4 et 2, M un point d'abscisse x. Déterminez l'ensemble des points M dans chacun des cas suivants.

a) $|x-2|+|x+4|=6$.
b) $|x-2|+|x+4|=4$.
c) $|x-2|+|x+4|=8$.
d) $|x+4|\leqslant|x-2|$.

EXERCICE 27.
EXERCICE 28. E