Fonctions polynomiales de degré 2.

I Forme développée.

Identifier une fonction polynomiale de degré deux.

Définition 1

On appelle *fonction polynomiale de degré 2* toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour laquelle il existe des réels a, b et c (a étant non nul) tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Remarques.

1. Notation : dans la suite de cette leçon a, b et c désigneront trois nombres réels avec $a \neq 0$.
2. La présentation de l'expression algébrique donnée dans la définition d'une fonction polynomiale de degré 2 est appelée la *forme développée*. Elle correspond à l'expression développée, ordonnée et réduite du polynôme.
3. Les nombres a, b et c sont appelés des *coefficients*.
4. a est appelé le *coefficient dominant*.
5. c est appelé le *terme constant*. Il joue le même rôle que l'ordonnée à l'origine des fonctions affines.
6. Les expressions aX^2, bX et c sont appelées des monômes.
7. L'écriture sous forme développée (réduite et ordonnée suivant les puissances décroissantes de x) est unique : c'est le principe d'identification des coefficients. Autrement dit deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont la même expression développée, réduite et ordonnée.
8. Nous utiliserons la forme développée pour identifier la fonction trinôme.

Exercice 1

Montrez que les fonctions suivantes (sauf une) sont bien des fonctions polynomiales de degré 2.

1. $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$
2. $h(x) = 2x + 13$
3. $k(x) = x^2$
4. $m(x) = 3(x-1)^2 - 2$
5. $g(x) = 8x - 7 - 3x^2$
6. $j(x) = 8x^2 - 3x + 5x + 2x^2 - 7$
7. $l(x) = -2(x-1)(x+3)$

Exercice 2 pour s'entraîner.

Identifiez parmi les fonctions définies par les expressions suivantes, quelque soit x dans $\mathbb{R}$, les fonctions polynomiales de degré deux. Vous démontrerez que c'en sont effectivement.

$f_1(x) = 3x^2 - 4x + 1$
$f_2(x) = x^2 - 2x + 3$
$f_3(x) = -x^2 + 4$
$f_4(x) = x(3x - 1)$
$f_5(x) = 2x - 4$
$f_6(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 1$
$f_7(x) = 2(x - 1)^2 + 1$
$f_8(x) = \frac{2}{x^2}4x - 5$
$f_9(x) = 2x^2 - 3x - 6x + 8\,680$
$f_{10}(x) = 2x^2 - 6x^4 + 8$
$f_{11}(x) = 2x^2 - 6\sqrt{x} + 3$
$f_{12}(x) = (x + 2)(x - 6)$
$f_{13}(x) = (3x + 4)^2 - (2x - 1)^2$
$f_{14}(x) = 2(x - 4)^2 + 12$

Courbe représentative.

Pour pouvoir décrire la courbe représentative de la fonction polynomiale de degré deux nous utiliserons le vocabulaire suivant.

Définition 2

La courbe représentative d'une fonction polynomiale de degré deux est appelée une *parabole*.
Si le coefficient dominant a est strictement positif ($a > 0$) alors nous dirons que la *parabole est orientée vers le haut*.
Si le coefficient dominant a est strictement négatif ($a < 0$) alors nous dirons que la *parabole est orientée vers le bas*.

Remarques.

1. Nous retiendrons que le coefficient dominant a indique l'orientation de la parabole.
2. Autrement dit à l'infini la fonction prend le signe de son coefficient dominant. Ou encore la parabole est orientée vers le haut si les branches se prolongent à l'infini vers le haut.
3. Il y a de nombreux exemples de modélisation avec la parabole en physique : voir ici ou ici.
4. Le point le plus haut ou le plus bas de la parabole est appelé *le sommet* de la parabole.
5. La parabole présente un axe de symétrie vertical passant par son sommet (nous y reviendrons en étudiant les variations de la fonction).

II Forme canonique.

Trouver la forme canonique.

Exercice 3

Recopiez en complétant par des nombres le raisonnement suivant :

Si f désigne la fonction polynomiale de degré deux définie par $f(x) = 3x^2 - 12x + 22$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors en essayant de faire apparaître une identité remarquable nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x^2 - \quad\quad x) + 22 \\ &= 3(x^2 - 2 \times x \times \quad\quad) + 22 \\ &= 3(x^2 - 2 \times x \times \quad\quad + 2^2 - \quad\quad) + 22 \\ &= 3(x^2 - 2 \times x \times \quad\quad + 2^2) + 3 \times \quad\quad + 22 \\ &= 3(x-2)^2 + \quad\quad \end{aligned}$$

Proposition 1

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax^2 + bx + c \end{array} \right.$ une fonction polynomiale de degré deux.
Il est toujours possible de trouver des nombres réels α et β tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Remarques :

1. Cette expression algébrique d'une fonction polynomiale de degré 2 est appelée la *forme canonique*.
2. La réciproque de cette proposition (la forme canonique est l'expression d'une fonction polynomiale de degré 2) est immédiate en développant.

   Dorénavant lorsque vous rencontrerez la forme canonique d'un trinôme vous pourrez affirmer sans démonstration qu'il s'agit d'une fonction polynomiale de degré 2.
3. La formule $\alpha = -\frac{b}{2a}$ est à connaître car très pratique dans les exercices (et $\beta = f(\alpha)$).

Exercice 4

Donnez les formes canoniques de la fonction polynomiale f définie sur $\mathbb{R}$ dans les cas suivants en procédant, si nécessaire, à une factorisation. Puis précisez les valeurs de a, α et β.

1. $f(x) = 2x^2 - 12x + 19$
2. $f(x) = x^2 + 1$
3. $f(x) = x^2 - 2x + 1$
4. $f(x) = -7x^2 - 14x + 3$

Exercice 5

Donnez la forme canonique de la fonction

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & -2x^2 - 4x - 14 \end{array}$$

en utilisant les formules pour α et β.

Exercice 6 pour s'entraîner.

Exercice 41 page 159 (Sesamath). Déterminer la forme canonique.

Variations de fonctions polynomiales de degré deux.

Exercice 7

Exercice 23 page 157 (Sesamath). Démontrer le sens de variation d'une fonction polynomiale de degré 2.

Proposition 2S

oit $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & a(x-\alpha)^2 + \beta \end{array}$

Si $a > 0$, alors le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variations de f	$+\infty$ ↘	β	↗ $+\infty$

Remarques :

1. On déduit du tableau de variation que, si $a > 0$, les fonctions polynomiales de degré 2 admettent un minimum absolu égal à β qui est atteint pour $x = \alpha$.
2. Si $a < 0$, alors les variations de f sont contraires.
3. Les fonctions polynomiales de degré 2 admettent toujours un extremum. Si $a < 0$, alors β est un maximum.
4. L'axe de symétrie de la parabole a pour équation $x = \alpha$.

5. On peut retrouver la forme canonique à partir de la forme développée grâce aux formules :
$$\alpha = \frac{-b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha)$$

Exercice 8

Donnez les tableaux de variation sur l'intervalle I des fonctions définies par leur expression algébrique et précisez leurs éventuels extrema.

1. Pour tout x de $I = \mathbb{R}$, $f(x) = -3(x+4)^2 - 7$.
2. Quelque soit x choisi dans $I = [-5\ ;\ 5]$, $g(x) = -8x + 4x^2 + 7$.
3. $I =]-\infty\ ;\ 4]$ et : $\forall x \in I$, $h(x) = (x+3)^2 - (x-5)^2$.

Exercice 9 pour s'entraîner.

Exercice 32 page 158 (Sesamath). Associer tableau de variation et forme canonique.

Sommet de la parabole.

Exercice 10

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -2(x+1)^2 + 7 \end{array} \right.$

Complétez le raisonnement suivant par des signes d'inégalités puis expliquez ce qui a été démontré.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Comme la fonction carrée est positive

$$(x+1)^2 \quad\quad 0$$

d'où

$$-2(x+1)^2 \quad\quad 0$$

Et donc

$$-2(x+1)^2 + 7 \quad\quad 7$$

Autrement dit

$$f(x) \quad\quad 7$$

De plus $f(\qquad) = 7$ donc f admet un   égale à   qui est atteint pour $x = \qquad$.

Proposition 3

Si f est une fonction polynomiale de degré 2 dont la forme canonique est $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors le sommet S de la parabole a pour coordonnées $S(\alpha; \beta)$.

Remarques.

1. Autrement dit : une fonction polynomiale de degré 2 admet un extremum égale à β qui est atteint en $x = \alpha$.
2. Vous n'aurez plus à le redémontrer. La valeur β est le maximum si $a < 0$ et le minimum sinon.

Exercice 11

Déterminez les éventuels extrema des fonctions suivantes sur l'ensemble I.

1. $f(x) = -2(x+1)^2 - 6$, $I = \mathbb{R}$.
2. $g(x) = 3x^2 - 12x + 17$, $I = \mathbb{R}$.
3. $h(x) = -(x-4)^2 + 2$, $I = [0; 10]$.

Exercice 12 pour s'entraîner.

Exercices 25 à 31 page 157 (Sesamath). Déterminer les sens de variation. Il est possible de généré aléatoirement des données dans ces exercices.

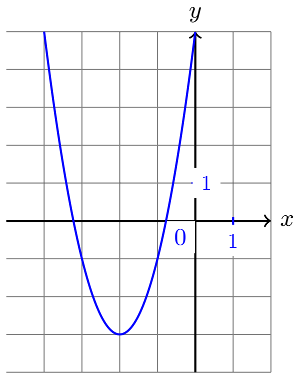
Exercice 13 pour s'entraîner.

Exercice 40 page 159 (Sesamath). Déterminer le tableau de variation.

Exercice 14

Trouvez la forme canonique de f sachant que quelque soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = 2(x - \qquad)^2 + \qquad.$$



Exercice 15 pour s'entraîner.

Exercices 34, 35 et 36 page 158 (Sesamath). Associer forme canonique et courbe représentative.

III Forme factorisée.

Définition 3

Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$, et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax^2 + bx + c \end{array} \right.$

La forme factorisée de la fonction polynomiale de degré 2 f est l'écriture (lorsque cela est possible) de son expression algébrique avec la présentation suivante

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

où x_1 et x_2 sont des nombres réels.

Remarques

1. Toute fonction de la forme $x \mapsto a(x-x_1)(x-x_2)$ est une fonction polynomiale de degré 2. Dorénavant lorsque vous rencontrerez la forme factorisée d'un trinôme vous pourrez affirmer sans démonstration qu'il s'agit d'une fonction polynomiale de degré 2.
2. Les nombres x_1 et x_2 sont appelés les *zéros* de la fonction ou les *racines* du trinôme.
3. La forme factorisée est particulièrement adaptée pour rechercher les solutions des équations du second degré ou pour étudier le signe des fonctions polynomiales de degré deux.

Exercice 16

Soit $f(x) = -2(x - 3)(x + 1)$ une fonction définie pour tout x réel.

1. Montrez que f est une fonction polynomiale de degré 2 dont vous préciserez les coefficients.
2. Calculez $f(3)$ et $f(-1)$.
3. Étudiez le signe de la fonction f.

Exercice 17 pour s'entraîner.

Donnez les tableaux de signes de la fonction f définie sur l'intervalle I lorsque :

1. $f(x) = 2(x + 10)(x - 15)$ et $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = -(x - 3)(x - 8)$ et $I = [0; 10]$.
3. $f(x) = -2(x + 1)(x + 1)$ et $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = 7\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{8}{3}\right)$ et $I =]-10; 20[$.
5. $f(x) = -5(x+1)(x-12)$ et $I = [0; 15]$.
6. $f(x) = \sqrt{2}(x - \pi)(x - \mathrm{e})$ et $I = \mathbb{R}$.

Trouver la forme factorisée à partir de la forme canonique.

Exercice 18

Soit f une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ dont la forme canonique est

$$f(x) = (x-2)^2 - 49$$

1. (a) Factorisez $f(x)$.
   (b) Déterminez les racines de f.
   (c) Étudiez le signe de f.
2. Essayez de répondre aux mêmes questions pour $g(x) = (x-2)^2 + 49$ et $h(x) = (x-2)^2$

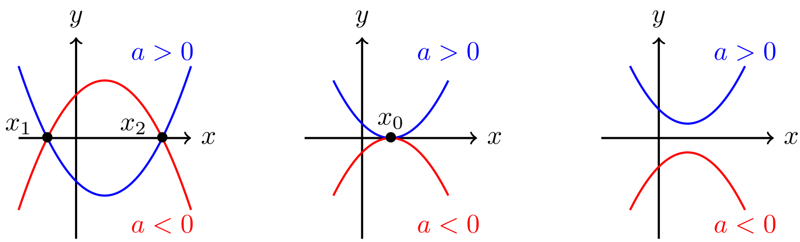
Remarques. Le précédent exercice illustre les faits suivants.

1. Il n'est pas toujours possible de factoriser une fonction polynomiale de degré deux. $X^2 + 1$ n'est typiquement pas factorisable dans $\mathbb{R}$.
2. Une fonction polynomiale de degré deux peut avoir 0, ou 1 ou 2 racines.
3. La méthode employée dans l'exercice précédent sera généralisée et formalisée en classe de première.

Interprétation graphique.

Trouver la forme factorisée d'une fonction trinôme revient à chercher ses racines. Or dire que x_0 est une racine du trinôme f revient à dire que $f(x_0) = 0$. Graphiquement cela signifie que la parabole représentant f coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse x_0.

Nous voyons graphiquement que trois situations vont se présentées :

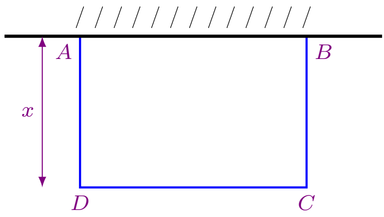


Ainsi l'équation $f(x) = 0$ aura donc 2 ou 1 ou aucune solutions.
À chacune des courbes ci-dessus est associée un tableau de signe distinct.

IV Exercices.

Exercice 19 pour s'entraîner.

Un exercice très classique : l'enclos.
On souhaite réaliser un enclos de forme rectangulaire avec une clôture de 100 m l'un des côtés de l'enclos étant formé d'un mur de pierre.
On désigne par x les longueurs des deux côtés perpendiculaires au mur.
L'objectif est de rendre la surface délimitée par l'enclos maximale.



1. Exprimez en fonction de x la longueur du troisième côté de l'enclos.
2. Exprimez en fonction de x l'aire $f(x)$ de la surface délimitée par l'enclos et le mur.
3. Résolvez l'inéquation $f(x) \geq 0$. Déduisez-en les seules valeurs de x susceptibles de nous intéresser.
4. Démontrez que pour tout $x \in [0;100]$, $f(x) = 1\,250 - 2(x-25)^2$.
5. Pour quelles valeurs de x la fonction f atteint-elle sont maximum ?
6. Donnez alors le dimensions de la surface délimité.

Exercice 20

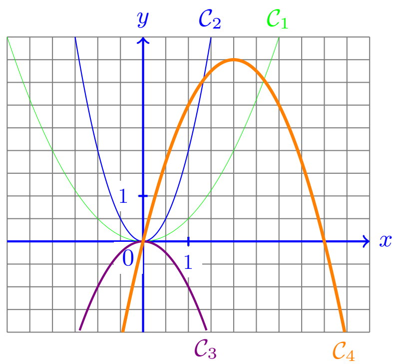
Les fonction indiquées sont définies sur $\mathbb{R}$.
Attribuez sa courbe à chacune d'elle.

$f_1 : x \mapsto -x^2$

$f_2 : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$

$f_3 : x \mapsto 2x^2$

$f_4 : x \mapsto x(4-x)$



Exercice 21 pour s'entraîner.

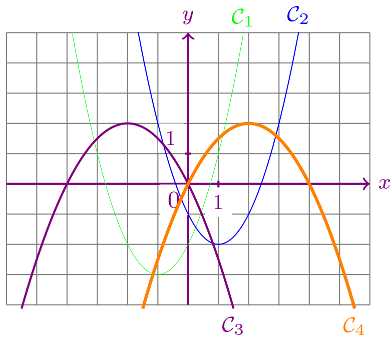
Les fonctions indiquées sont définies sur $\mathbb{R}$.
Attribuez sa courbe à chacune d'elles.

$f_1 : x \mapsto x^2 + 2x - 2$

$f_2 : x \mapsto -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$

$f_3 : x \mapsto (x-1)^2 - 2$

$f_4 : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$



Exercice 22

Démontrez que $(\sqrt{3}+\sqrt{4})^2 + 1 < (\sqrt{3}+\sqrt{4}+1)^2 + 1$.

Exercice 23

Les fonctions considérées ici sont définies sur $\mathbb{R}$.
Pour chacune d'elles, dressez son tableau de variation.

$f(x) = 5 - 2(x+1)^2$

$g(x) = 2(1-3x)(1-x)$

$u(t) = \frac{1}{4} - t^2$

$v(t) = \frac{1}{3}(1-t^2)$

Exercice 24

Une entreprise fabrique un article haut de gamme. Le coût de production mensuel en euros en fonction du nombre x d'articles fabriqués est : $C(x) = x^3 - 300x^2 + 25\,000x$.

L'entreprise peut fabriquer au maximum 300 articles par mois et nous supposerons qu'elle les vend tous.

1. Le coût mensuel moyen de production d'un article lorsqu'on en produit x (non nul) est $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$.
   (a) Vérifiez que $C_m(x) = (x-150)^2 + 2\,500$.
   (b) Démontrez que le minimum de la fonction C_m est $2\,500$. Pour quelle production est-il atteint ?
2. Chaque article est vendu 8 900 €.
   (a) Déterminez le bénéfice mensuel $B(x)$ en fonction du nombre x d'articles fabriqués et vendus.
   (b) Le bénéfice mensuel moyen sur un article lorsqu'on en produit x (non nul) est $B_m(x) = \frac{B(x)}{x}$.
   Vérifiez que $B_m(x) = 6\,400 - (x-150)^2$.
   (c) Démontrez que $B_m(x) = -(x-230)(x-70)$.
   (d) Déduisez-en les productions pour lesquelles $B_m(x) \geq 0$.

Exercice 25 pour s'entraîner.

Une entreprise fabrique un produit. Pour une période donnée, le coût total de production, en euros, est donné en fonction du nombre q d'articles fabriqués par :

$$C(q) = 2q^2 + 10q + 900, \text{ avec } 0 < q < 80.$$

Tous les articles sont vendus.

En euros, la recette total est $R(q) = 120q$ et le bénéfice total est $B(q) = R(q) - C(q)$.

1. Démontrez que B est une fonction polynomiale de degré 2 dont vous préciserez les coefficients.
2. Démontrez que, quelque soit $q \in]0;80[$, $B(q) = -2\left(q - \frac{55}{2}\right)^2 + \frac{1225}{2}$.
3. Démontrez que, quelque soit $q \in]0;80[$, $B(q) = -2(q-10)(q-45)$.
4. La production est rentable lorsque $B(q) > 0$. Déterminez les quantités pour lesquelles la production est rentable.
5. Déterminez les bénéfices maximum et minimum.

Exercice 26 pour s'entraîner.

Une entreprise fabrique des poutres métalliques qu'elle vend 2,3 milliers d'euros la tonne. Les coûts de production s'expriment en fonction du tonnage x produit ($x \geq 0$) par : $C(x) = 0{,}4x^2 - 4{,}1x + 0{,}8$.

1. Exprimez en milliers d'euros, le prix de vente $P(x)$ en fonction de x.
2. Le bénéfice $B(x)$ est la différence entre le prix de vente et les coûts de production.
   (a) Exprimez $B(x)$ en fonction de x.
   (b) Déduisez-en le tableau de variation de la fonction bénéfice et le bénéfice maximal espéré.
   (c) Évaluez graphiquement, sur votre calculatrice, le tonnage à produire afin de réaliser un bénéfice positif.

Exercice 27 pour s'entraîner.

Le propriétaire d'un cinéma de 1 000 places estime, pour ses calculs, qu'il vend 300 billets à 7 € par séance.

Il a constaté qu'à chaque fois qu'il diminue le prix du billet de 0,1 €, il vend 10 billets de plus.

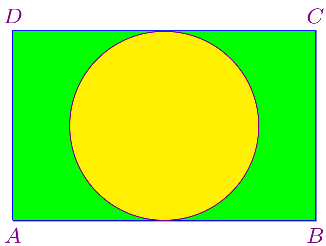
Il engage une campagne de promotion.

1. Il décide de vendre le billet 5 €.
   (a) Combien y aura-t-il de spectateurs pour une séance ?
   (b) Quelle est alors la recette pour une séance ?
2. À quel prix devrait-il vendre le billet pour remplir la salle ? Quel est votre commentaire ?
3. Le propriétaire envisage de proposer x réductions de 0,1 €
   (a) Quel est alors le prix d'un billet en fonction de x ?
   (b) Exprimez en fonction de x le recette, notée $r(x)$, pour une séance et vérifiez que $r(x) = -x^2 + 40x + 2\,100$.
   (c) Donnez le tableau de variation de la fonction r sur l'intervalle $[0;70]$.
   (d) Déduisez-en la recette maximale, le prix du billet et le nombre de spectateurs de cette séance.

Exercice 28

Soit f un trinôme dont les racines sont 4 et 5. Donnez la forme développée de f sachant que $f(2) = 6$.

Exercice 29 pour s'entraîner.



Le drapeau rectangulaire $ABCD$ a pour centre O, une longueur fixe $AB = 8$ et une largeur AD variable ; le cercle de centre O est tangent à deux cotés du rectangle.

Comment fixer la largeur AD pour que la partie verte et la partie jaune aient la même aire ?

Exercice 30

Lorsqu'un projectile est lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse initiale de 245 m.s^{-1}, la distance d (en mètres) le séparant du point de départ et sa vitesse v (en m.s^{-1}) à un instant t (en secondes) compté à partir de l'instant du départ, sont donnés par

$$d(t) = 245t - \frac{1}{2} \times 9{,}8t^2 \quad v(t) = 245 - 9{,}8t$$

Déterminez

1. L'instant auquel le projectile est à son point culminant.
2. L'instant auquel il repasse au point de départ.
3. La hauteur du point culminant.
4. La vitesse du projectile au point culminant.
5. La vitesse du projectile au moment où il repasse au point de départ.

Exercice 31 pour s'entraîner.

Un arrêté d'application du code de la route fixe la distance de freinage jusqu'à l'arrêt pour une voiture automobile en fonction de la vitesse par la formule

$$d = 0{,}75v^2 + 2{,}5v$$

v étant la vitesse exprimée en myriamètres par heure (i myriamètre représente 10 kilomètres).

Quelle doit être la vitesse d'une voiture pour qu'elle s'arrête sur une distance 50 mètres ?

Étudiez les variations de la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$v \mapsto 0{,}75v^2 + 2{,}5v$$

Exercice 32 pour s'entraîner.

Nous souhaitons résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 = -2x + 3$ sur $\mathbb{R}$.

1. En représentant graphiquement les fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = -2x + 3$ avec la calculatrice conjecturez le nombre de solutions de l'équation.
2. Donnez la forme canonique de la fonction trinôme $h(x) = x^2 + 2x - 3$.
   Rappel $\alpha = -\frac{b}{2a}$ *et* $\beta = h(\alpha)$.
3. Donnez la forme factorisée de h.
4. Résoudre l'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$ et conclure.

Exercice 33 pour s'entraîner.

Le nombre d'or φ est l'unique solution positive de l'équation $x^2 = x + 1$.

Partie A : valeur exacte du nombre d'or.

Nous noterons $f : x \mapsto x^2 - x - 1$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminez la forme canonique de f.
2. Déduisez-en, si possible , la forme factorisée de f.
3. Déterminez les racines de f. En particulier donnez une valeur exacte de φ.

Partie B : valeurs approchées du nombre d'or.

Nous souhaitons déterminer un encadrement à 10^{-3} près du nombre d'or.

1. Tracez sur la calculatrice la courbe représentative de la fonction f définie ans la partie A. Donnez un encadrement entre deux entiers consécutifs du nombre d'or.
2. Grâce au tableau de valeurs de la calculatrice avec des pas successivement de 0,1, 0,01 puis 0,001, déterminez un encadrement du nombre φ entre deux nombres dont la différence est inférieure ou égale à 0,001.
3. (a) Programmez dans votre calculatrice l'algorithme
   (b) Analysez l'agorithme en
      — donnant le tableau de fonctionnement pour deux boucles du tant que,
      — précisant le rôle des différentes variables.
      — indiquant le rôle de cet algorithme.
   (c) Comment modifier le précédent algorithme pour obtenir une valeur approchée à 10^{-5} de φ ?

```
Variables : a, b, m
Traitement :
a prend la valeur 1
b prend la valeur 2
Tant que b − a > 0,001, faire
    m prend la valeur (a + b)/2
    Si m² − m − 1 > 0, alors
        b prend la valeur m
    Sinon
        a prend la valeur m
    Fin si
Fin Tant que
Afficher a
Afficher b
```