

Fonctions de référence.

Fonction identité.

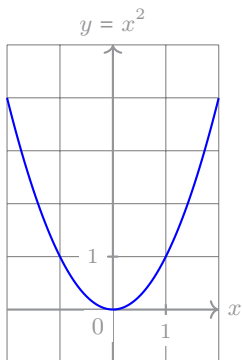
Les informations concernant la fonction identité relèvent de l'étude des fonctions affines. Il faut donc se référer à leçon idoine.

Fonction carré.

Soit x un nombre réel. Le **carré de x** , qu'on note x^2 , est le nombre réel $x \times x$.

Définition 1. La fonction carrée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui à chaque réel x associe son carré x^2 . Autrement dit :
$$\begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$$

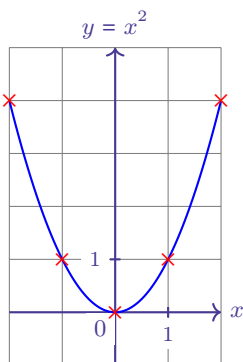
Avec la puissance de calcul des ordinateurs on peut obtenir une représentation graphique de la courbe représentative de la fonction carré qui est appelée une **parabole** (ici pour $x \in [-2 ; 2]$).



Remarques.

1. Cette représentation graphique que nous n'avons pas démontrée pour l'instant doit être apprise par cœur car cela résume l'ensemble des connaissances que vous devez avoir concernant la fonction carré. Ce graphique permet de conjecturer un certain nombre d'éléments de la fonction carrée : un axe de symétrie, le signe (toujours positif), les variations,...
2. La parabole présente une symétrie axiale dont l'axe est l'axe des ordonnées nous en reparlerons à propos de la parité.
3. Commençons à justifier ce tracé en donnant un tableau de valeurs minimaliste et donc les coordonnées de points de la courbe.

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4



Proposition 1. Tableau de signe de la fonction carré :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+$	0	$+$

Démonstration. Montrons que la fonction carré est positive (ou nulle).

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Le produit de deux nombres de même signe est un nombre positif donc : $x^2 = x \times x \geq 0$.

Recherchons les valeurs de x pour lesquelles x^2 égale 0.

$x^2 = 0 \Leftrightarrow x \times x = 0$ est une équation produit. Donc $x^2 = 0$ équivaut à $x = 0$ ou $x = 0$.

Autrement dit $x^2 = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Remarques.

1. Nous retrouvons comme avec le tableau de valeurs que $\mathcal{C}_f$ passe par l'origine du repère. Nous pouvons ajouter que c'est le seul point de contact avec l'axe des abscisses et que le reste de $\mathcal{C}_f$ est situé strictement au-dessus de l'axe des abscisses.

Proposition 2. Tableau de variations de la fonction carrée :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2			

Démonstration. Montrons que la fonction carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Soient x_1 et x_2 deux nombres quelconques dans $[0 ; +\infty[$ tels que : $x_1 < x_2$.

D'une part :

$$x_1^2 \leq x_2 \times x_1, \text{ car } x_1 \geq 0$$

et d'autre part :

$$x_1 x_2 < x_2^2, \text{ car } x_2 x_2 > x_1 \geq 0$$

On en déduit :

$$x_1^2 \leq x_1 x_2 < x_2^2$$

et donc $x_1^2 < x_2^2$.

Nous avons démontrés que la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Montrons que la fonction carrée est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$.

Soient x_1 et x_2 deux nombres quelconques dans $] -\infty ; 0]$ tels que : $x_1 < x_2$.

D'une part :

$$x_1^2 > x_2 \times x_1, \text{ car } x_1 x_1 < x_2 \leq 0$$

et d'autre part :

$$x_1 x_2 \geq x_2^2, \text{ car } x_2 x_2 \leq 0$$

On en déduit :

$$x_2^2 \leq x_1 x_2 < x_1^2$$

et donc $x_2^2 < x_1^2$.

Nous avons démontrés que la fonction carrée est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Remarques.

1. Autrement dit : la fonction carrée est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
2. La fonction carrée n'est pas une fonction affine.

Démonstration.

Nous avons vu qu'une fonction est affine si et seulement si son taux d'accroissement est constant (quelles que soient les valeurs choisies pour x_1 et x_2).

Nous allons démontrer que le taux d'accroissement n'est pas constant.

Déterminons deux taux d'accroissements distincts pour la fonction carrée.

Cas 1 : Si $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$ alors le taux d'accroissement de la fonction carrée entre x_1 et x_2 est :

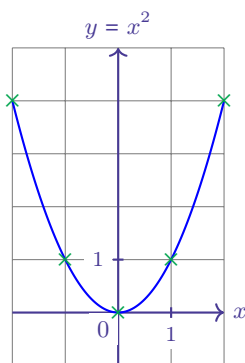
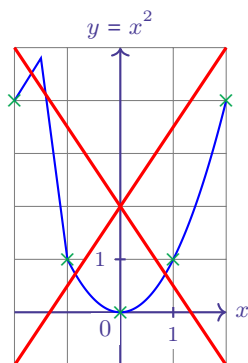
$$\tau = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = 1$$

Cas 2 : Si $x_1 = 0$ et $x_2 = -1$ alors le taux d'accroissement de la fonction carrée entre x_1 et x_2 est :

$$\tau = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = -1$$

Le taux d'accroissement n'est donc pas constant et la fonction carrée n'est pas une fonction affine.

3. Nous pouvons être sûrs qu'entre les points de coordonnées $(-2; 4)$ et $(-1; 1)$ la courbe ne fait que descendre et ne remonte pas (inutile de calculer toutes les valeurs intermédiaires).



EXERCICE 1. Dans chaque cas comparez les nombres A et B sans utiliser la calculatrice.

- a) $A = \left(\frac{3}{4}\right)^2$ et $B = \left(\frac{4}{3}\right)^2$, b) $A = 1,001^2$ et $B = 1,0099^2$, c) $A = -2,3^2$ et $B = (-2,3)^2$.

Exercice 1.

- a) Comparons A et B .

Nous allons utiliser le fait qu'une fonction croissante conserve l'ordre.

La fonction carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Or $\frac{3}{4} < 1 < \frac{4}{3}$ et $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{3}$ sont dans $[0; +\infty[$ donc

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 < \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

- b) Comparons A et B .

La fonction carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Or $1,001 < 1,0099$ et $1,001$ et $1,0099$ sont dans $[0; +\infty[$ donc

$$1,001^2 < 1,0099^2$$

- c) Comparons A et B .

$-2,3^2$ n'est pas une image par la fonction carrée. La précédente méthode ne fonctionnera donc pas.

Clairement : $-2,3^2 < 0 < (-2,3)^2$

$$-2,3^2 < (-2,3)^2$$

EXERCICE 2. Encadrez x^2 , puis $3x^2$, le plus précisément possible, dans les cas suivants :

- a) $1 \leq x \leq 4$, b) $-2 \leq x < -0,5$, c) $-2 \leq x < 3$,
d) $-10 \leq x \leq 10$.

Exercice 2. Pour avoir un résultat très précis il faut raisonner algébriquement. Sinon une résolution graphique convient. Cette dernière est même parfois plus simple et efficace.

EXERCICE 3. Recopiez et complétez sans justification les phrases suivantes.

- a) Si $x \leq -7$, alors $x^2 \dots$
b) Si $x \geq 5\sqrt{2}$, alors $x^2 \dots$
c) Si $-7 \leq x \leq 5\sqrt{2}$, alors $\dots \leq x^2 \leq \dots$

EXERCICE 4. Prouvez que les propositions suivantes sont fausses.

- a) Si $x \leq 1$, alors $x^2 \leq 1$.
- b) Si $x > -\sqrt{10}$, alors $x^2 < 10$.

EXERCICE 5. Résolvez graphiquement les inéquations

- a) $x^2 \leq 5$.
- b) $x^2 > 5$.
- c) x est négatif et $x^2 \leq 5$.

Fonction inverse.

Définition 2. La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (tous les nombres sauf 0) par $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Remarques.

- 1. La courbe représentative de la fonction inverse est appelée une *hyperbole*.
- 2. L'hyperbole présente une symétrie centrale dont le centre est l'origine du repère nous en reparlerons à propos de la parité.
- 3. L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ peut aussi être noté $] - \infty ; 0[\cup] 0 ; + \infty[$ ou $\mathbb{R}^*$.

Proposition 3. Tableau de signe de la fonction inverse.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$-$		$+$

Démonstration. Si $x > 0$, alors $\frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow 1 > 0$ et cette dernière assertion est vraie. De même si $x < 0$ alors $\frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow 1 < 0$ et cette dernière assertion est fausse. Le cas $x = 0$ est exclus car la fonction n'est pas définie en 0.

Proposition 4. Tableau de variation de la fonction inverse.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$			

Démonstration. Nous allons démontrer trois choses : la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$, sur $\mathbb{R}_+^*$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

* Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_-^*$ tels que $x_1 < x_2$. Donc

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} &> \frac{x_2}{x_2} \quad \text{car } x_2 < 0 \\ \frac{x_1}{x_2} &> 1 \\ \frac{1}{x_1} \times \frac{x_1}{x_2} &< \frac{1}{x_1} \times 1 \quad \text{car } \frac{1}{x_1} < 0 \\ \frac{1}{x_2} &< \frac{1}{x_1} \end{aligned}$$

Donc

la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

* Idem pour $\mathbb{R}_+^*$.

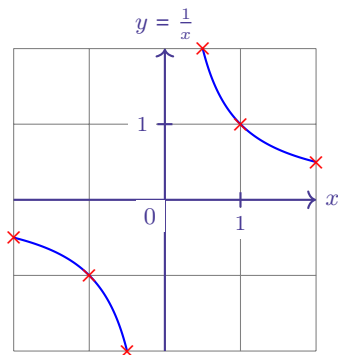
* $-2 < 2$ et pourtant $-\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ donc la fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$.

Remarques.

1. Aux tableaux de signes et variations adjoignons un succinct tableau de valeurs :

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$

et nous pouvons donner l'allure de la représentation graphique de la fonction inverse sur $[-2; 2]$.



Fonction racine carrée.

Définition 3. La *fonction racine carrée* est définie sur $[0; +\infty[$ (tous les nombres positifs) comme la fonction qui à tout $x \in \mathbb{R}_+$ associe l'unique nombre a positif tel que $a^2 = x$.

Remarques.

1. Il s'agit d'une définition implicite nous ne connaissons pas la valeur de a et qui plus son existence est affirmée sans être justifiée.
2. La fonction racine carrée étant définie sur $\mathbb{R}_+$ sa représentation graphique sera tout entière à droite de l'axe des ordonnées.
3. Pour des propriétés algébriques voyez la leçon sur la racine carrée.

Proposition 5. Tableau de signe de la fonction racine carrée.

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	+

Démonstration. C'est une conséquence directe de la définition de la racine carrée d'un nombre positif.

Proposition 6. La fonction racine carrée est strictement croissante (sur $\mathbb{R}_+$).

Démonstration. Supposons $a < b$ et démontrons que $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Nous allons en fait démontrer que $\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$.

Puisque $a < b$:

$$b - a > 0.$$

Or, a et b étant positifs,

$$\begin{aligned} b-a &= \sqrt{b}^2 - \sqrt{a}^2 \\ &= (\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a}) \end{aligned}$$

donc

$$(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a}) > 0$$

Et comme $(\sqrt{b} + \sqrt{a}) > 0$:

$$\frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{(\sqrt{b} + \sqrt{a})} > \frac{0}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$$

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$$

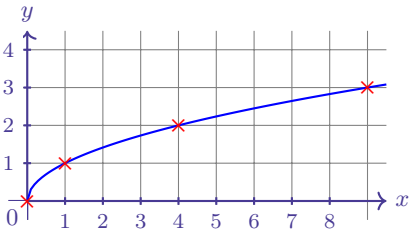
Ainsi dès que $a < b$ forcément $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Remarques.

1. Nous n’avons pas dressé le tableau de variation car la fonction racine carrée est strictement monotone et il est donc plus simple de le dire en français.
2. Ce résultat constitue une nouvelle façon de transformer une inéquation. Lorsque nous verrons $x^2 + x^4 < 8 + x^2$ alors nous pourrons affirmer que $\sqrt{x^2 + x^4} < \sqrt{8 + x^2}$.
3. Ajoutons aux précédentes informations un tableau de valeurs :

x	0	1	4	9
$\sqrt{x}$	0	1	2	3

et nous pouvons donner l’allure de la représentation graphique de la fonction racine carrée :



4. La courbe représentative de la fonction racine carrée est une branche de parabole.

Fonction cube.

Définition 4. La fonction cube est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^3$.

Proposition 7. Tableau de signe de la fonction cube.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^3	$-$	0	$+$

Démonstration. Avec un tableau de signe en remarquant $x^3 = xx^2$.

Proposition 8. La fonction cube est strictement croissante (sur $\mathbb{R}$).

Démonstration.

* Démontrons que la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Nous allons utiliser une identité remarquable qui vous est encore inconnue :

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2$.

Démontrons que $x_1^3 < x_2^3$.

Ou plutôt, ce qui revient au même démontrons que $x_2^3 - x_1^3 > 0$.

Pour étudier le signe d'une expression il vaut mieux qu'elle soit factorisée : $x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$.

D'une part, par hypothèse,

$$x_2 - x_1 > 0.$$

D'autre part, puisque $0 \leq x_1 < x_2$: $x_1 \geq 0$, $x_1x_2 \geq 0$ et $x_2^2 > 0$ donc

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 > 0.$$

Donc :

$$(x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) > 0.$$

Ainsi, si $0 \leq x_1 < x_2$ alors $x_1^3 < x_2^3$.

Autrement dit

la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

* La fonction cube étant impaire nous en déduisons par symétrie, que la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$.

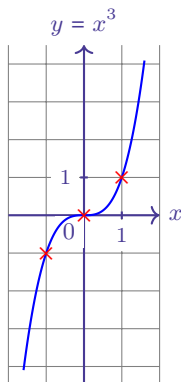
* Il reste à s'assurer que si $x_1 \leq 0 \leq x_2$ nous avons toujours conservation de l'ordre.

Remarques.

1. Ajoutons aux précédentes informations un tableau de valeurs :

x	-1	0	1
$\sqrt{x}$	-1	0	1

et nous pouvons donner l'allure de la représentation graphique de la fonction cube :



Fonction valeur absolue.

Confer la leçon correspondante.

Exercices.

EXERCICE 6.

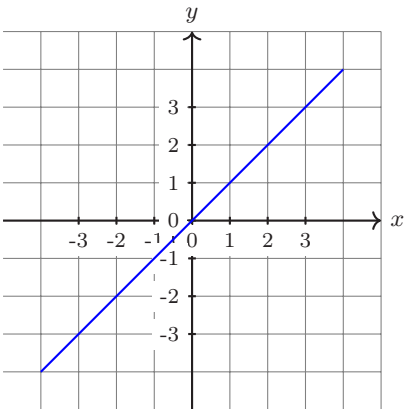
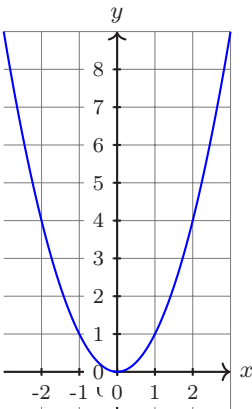
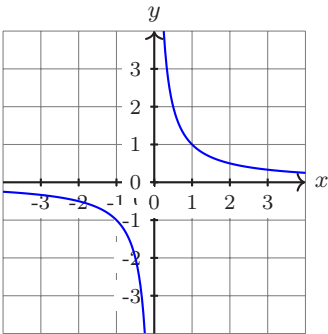
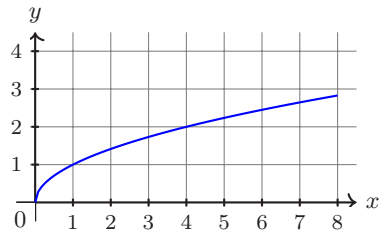
Associez, sans aucune justification, chaque fonction à sa courbe représentative.

$f_1 : x \mapsto \frac{1}{x},$

$f_3 : x \mapsto \sqrt{x},$

$f_2 : x \mapsto x,$

$f_4 : x \mapsto x^2.$



Positions relatives de fonctions de références.

Nous allons discuter de la position relative des courbes d'équations $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$ pour $x \geq 0$.