Fonctions affines.

I Des fonctions simples mais importantes.

Définition 1

Soit f une fonction numérique. f est dit *affine* si et seulement si il existe des nombres a et b réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.

Dans ce cas a est appelé *le coefficient directeur* (ou *pente*) et b est appelé *l'ordonnée à l'origine*.

Remarques.

1. Les fonctions linéaires et constantes sont des cas particuliers de fonctions affines. Si $a = 0$ la fonction affine est une *fonction constante*. Si $b = 0$ alors la fonction affine est une *fonction linéaire*.
2. *La courbe représentative d'une fonction affine est une droite*. Les termes coefficient directeur et ordonnée à l'origine sont habituellement réservés à l'équation réduite de cette droite que nous verrons ultérieurement. Pour des raisons pratiques, et parce que cela ne conduit à aucune incohérence nous utiliserons ces termes pour parler des coefficients de la fonction affine.
3. Une fonction affine est une fonction polynomiale de degré strictement plus petit que deux.
4. Le nom de b (ordonnée à l'origine) vient du fait que : $b = f(0)$.
5. Les fonctions affines sont des fonctions simples à étudier qui offrent de nombreuses applications comme étudier des fonctions plus complexes (exercices suivants), étudier des droites (leçon ultérieure) ou encore résoudre des équations et des inéquations linéaires.

Exercice 1

Tracez la courbe représentative de la fonction affine $f : x \mapsto -\frac{1}{3}x + 2$ sur $[-3; 6]$.

Exercice 2

Soient f_1 et f_2 deux fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = 3x + 1 \quad f_2(x) = -6x + 1$$

On construit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f_1(x) \times f_2(x)$$

1. Développez, réduisez et ordonnez l'expression de f.

2. Quelle est la nature de la fonction f ?

Exercice 3

Soient f_1 et f_2 deux fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = 2x - 4 \quad f_2(x) = x + 13$$

On construit une fonction f, appelée *homographie*, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

1. Déterminez l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Dressez le tableau de variation de la fonction f d'après sa représentation graphique.

II Étude du signe d'une fonction affine.

Exercice 4

Soit $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -7x + 49 \end{array} \right.$

1. Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $h(x) > 0$ d'inconnue x.
2. Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $h(x) = 0$ d'inconnue x.
3. Déduisez-en l'ensemble des solutions de l'inéquation $h(x) < 0$ d'inconnue x réelle.
4. D'après les questions précédentes, dressez le tableau de signe de la fonction h.

Exercice 5

En procédant comme dans l'exercice précédent dressez le tableau de signe de la fonction

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 5x - 7 \end{array} \right.$$

Proposition 1

Soient a et b deux nombres réels, $a \neq 0$, f la fonction affine définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$$

Si $a > 0$, alors :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Si $a < 0$, alors :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Remarques.

1. La démarche de la preuve (avec des valeurs numériques) doit être connue.
2. Solution de secours : on peut retrouver le tableau de signe d'une fonction affine en affichant sa courbe à la calculatrice. Ce n'est pas une démonstration.
3. Si $a = 0$, ...

Exercice 6

Démontrez l'autre cas de la preuve.

Exercice 7

Exercice 17 page 141 (Sesamath). Dresser le tableau de signes.

Exercice 8 pour s'entraîner.

Exercice 18 page 141 du manuel Sesamath : tableau de signe et comparaison de nombres en utilisant la croissance de la fonction.

Exercice 9 pour s'entraîner.

Exercice 19 page 141 du manuel Sesamath : tableau de signe et lecture du signe par intervalles.

Exercice 10

Exercice 20 page 141 du manuel Sesamath : dresser le tableau de signe à partir de la représentation graphique déterminer l'expression algébrique avec l'ordonnée à l'origine puis en résolvant une équation.

Exercice 11 pour s'entraîner.

Donnez le tableau de signe de f définie sur l'intervalle I dans les différents cas proposés.

1. $f(x) = 2x + 4$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = 5x - 15$, $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = -7x + 14$, $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = -13x - 39$, $I = \mathbb{R}$.
5. $f(x) = x + 7$, $I = \mathbb{R}$.
6. $f(x) = x - \pi$, $I = \mathbb{R}$.
7. $f(x) = -x + \sqrt{2}$, $I = \mathbb{R}$.
8. $f(x) = -x - 2$, $I = \mathbb{R}$.
9. $f(x) = 3x + 7$, $I = \mathbb{R}$.
10. $f(x) = 5x - 4$, $I = \mathbb{R}$.
11. $f(x) = -4x + 13$, $I = \mathbb{R}$.
12. $f(x) = -3x - 4$, $I = \mathbb{R}$.
13. $f(x) = 5x + 12$, $I =]-\infty; -3[$.
14. $f(x) = 6x - 8$, $I = [-12; 10]$.
15. $f(x) = -8x + 12$, $I = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$.
16. $f(x) = -3x - 24$, $I =]-8; 10[$.

III Tableau de variation.

Définition 2

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que f est *strictement croissante* sur I si et seulement si pour tous nombres x_1 et x_2 choisis dans I si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) < f(x_2)$.

Remarques.

1. C'est une définition complexe. Il faut comprendre l'idée correspondante : dire que f est *croissante* c'est dire que *quand les x augmentent les $f(x)$ augmentent aussi*. Il faut commencer à se familiariser avec l'aspect technique.
2. Avec les quantificateurs universels on peut réécrire la définition. f est *strictement croissante* si et seulement si :
$$\forall x_1,x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$
3. Nous pouvons définir de même :
   (a) f est *croissante* ssi lorsque $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$.
   (b) f est *strictement décroissante* ssi lorsque $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$.
   (c) f est *décroissante* ssi lorsque $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$.
4. Nous dirons que *les fonctions croissantes conservent l'ordre tandis que les fonctions décroissantes ne conservent pas l'ordre*.

Exercice 12

Montrez que la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2x+1$ est strictement croissante.

Exercice 13

Montrez que la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -2x+5$ est strictement décroissante.

Proposition 2

Soient a et b deux nombres réels, f la fonction affine définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$$
Si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.
Si $a < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14

Exercice d'application de la proposition. Les questions sont indépendantes deux à deux.

1. Montrez que la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -3x+1 \end{array} \right.$ est strictement décroissante.
2. Quel est le sens de variation sur $\mathbb{R}$ de la fonction g définie pour tout x réel par : $g(x) = \frac{1-\sqrt{2}}{2}x - \frac{\pi^2}{\sqrt{13}}$?

3. Donnez le tableau de variation de la fonction numérique h de la variable réelle x telle que : $h(x) = 8x + 2$.
4. Exercice 29 page 124 (Sesamath).
5. Comparez les nombres suivants sans calculs :
   (a) $-\frac{7}{13} \times \pi + 1$ et $-\frac{7}{13} \times 2 \times \pi + 1$,
   (b) $3\pi\sqrt{2} - 14$ et $-14 + \sqrt{2} \times 2\pi$.

Exercice 15 pour s'entraîner.

Déterminez le tableau de signe de la fonction définie sur I en raisonnant avec le sens de variation.

1. $f(x) = 3x + 6$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = 7x - 21$, $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = -5x + 10$, $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = -12x - 24$, $I = \mathbb{R}$.
5. $f(x) = x + 6$, $I = \mathbb{R}$.
6. $f(x) = x - 200$, $I = \mathbb{R}$.
7. $f(x) = -x + 10^4$, $I = \mathbb{R}$.
8. $f(x) = -x - 1{,}5$, $I = \mathbb{R}$.
9. $f(x) = 7x + 2$, $I = \mathbb{R}$.
10. $f(x) = 3x - 22$, $I = \mathbb{R}$.
11. $f(x) = -6x + 4$, $I = \mathbb{R}$.
12. $f(x) = -7x - 12$, $I = \mathbb{R}$.
13. $f(x) = 11x + 15$, $I =]0; +\infty[$.
14. $f(x) = 3x - 14$, $I = [-10; 10]$.
15. $f(x) = -23x + 138$, $I = [6; +\infty[$.
16. $f(x) = -7x - 77$, $I =]-11; 11[$.

Exercice 16 pour s'entraîner.

Exercice 25 page 124 du Sésamath : en admettant que la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+ = [0\ ;\ +\infty[$.

Remarque.

1. La connaissance des variations de la fonction affine permet de retrouver les tableaux de signes en raisonnant à partir de la courbe représentative.

IV Identifier une fonction affine.

Voici un outil pour mesurer la croissance (rapide ou lente) d'une fonction que vous retrouverez en économie ou pour la dérivation (programme de première).

Définition 3

Soients :
. f une fonction numérique définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$,
. x_1 et x_2 deux nombres de $\mathcal{D}_f$ tels que $x_1 < x_2$.

Le *taux d'accroissement de f entre x_1 et x_2* est le nombre :

$$\tau_f(x_1,x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Proposition 3

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ a un taux d'accroissement constant si et seulement si c'est une fonction affine.
Dans ce cas son taux d'accroissement est alors son coefficient directeur (pente).

Exercice 17

Exercice 21 page 141 du manuel Sesamath. Retrouver l'expression algébrique de la fonction affine à partir de sa représentation graphique.

Exercice 18

Montrez que les fonctions inverse, carrée, cube et racine carrée ne sont pas des fonctions affines.

V Exercices.

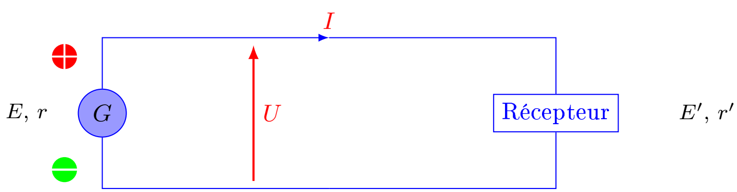
Exercice 19

Une patinoire propose deux tarifs :
- tarif A : chaque entrée coûte 5,25 €.
- tarif B : un abonnement annuel de 12 € et chaque entrée coûte alors 3,50 €.

x désigne le nombre de fois qu'un patineur a fréquenté la patinoire.

1. (a) Donnez l'expression de la fonction f qui modélise le budget annuel pour la patinoire avec le tarif A et celle de g pour le tarif B.
   (b) Tracez ces deux fonctions dans un repère approprié (attention au choix des unités).
2. (a) Résolvez graphiquement $f(x) > g(x)$.
   (b) Résolvez par le calcul $f(x) > g(x)$.
   (c) Que peut faire le patineur de ces solutions quand il veut déterminer lequel des deux tarifs est le plus avantageux ?

Exercice 20

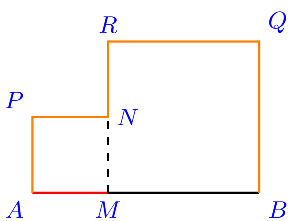


Dans le circuit ci-dessus, le générateur possède une force électromotrice E et une résistance interne r. La tension U_1 à ses bornes est une fonction affine de l'intensité I du courant électrique selon la formule $U_1 = E - rI$.

De même, le récepteur possède une force contre électromotrice E' et une résistance interne r'. La tension U_2 aux bornes du récepteur est également une fonction affine de l'intensité du circuit I selon la formule $U_2 = E' + r'I$.

1. Nous supposerons que $E = 300\text{V}$, $E' = 200$ V, $r = 10\ \Omega$ et $r' = 5\ \Omega$.
   Tracez dans un même repère la courbe représentative de U_1 en fonction de I et de U_2 en fonction de I.
2. Lorsque le circuit est branché, la tension aux bornes du générateur est égale à la tension aux bornes du récepteur.
   Montrez alors que $I = \frac{E-E'}{r+r'}$.

Exercice 21



$AB = 6$ cm. M est un point du segment $[AB]$ et nous noterons $AM = x$. Dans le même demi-plan de frontière (AB), sont construit les carrés $AMNP$ et $MBQR$.
f est la fonction qui à x associe la longueur $f(x)$ de la ligne polygonale $APNRQB$ (tracée en orange sur la figure ci-contre).
La figure a été faite dans le cas où x est compris entre 0 et 3.

Trouvez l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la longueur de la ligne polygonale est comprise entre 14 et 16 cm.

Exercice 22 pour s'entraîner.

Une revue n'est distribuée que sur abonnement annuel. Le nombre d'abonnés $A(x)$ est donné en fonction du prix x de l'abonnement en euros par :

$$A(x) = -50x + 12\,500, \text{ pour } x \geq 0.$$

1. Si l'abonnement est fixé à $x = 50$ €, quel est le nombre d'abonnés $A(x)$?
2. (a) Quel est le sens de variation de la fonction A ?
   (b) Comment évolue le nombre d'abonnés quand le prix de l'abonnement augmente ?
   (c) De combien varie le nombre d'abonnés quand le prix augmente de 1 € ?
3. (a) Calculez $A(250)$.
   (b) Pour quelles valeurs de x a-t-on $A(x) \geq 0$?
4. La recette.
   (a) Le prix de l'abonnement est de 50 €.
   Quelle est la recette correspondante ?
   (b) Le prix de l'abonnement est x $(0 \leq x \leq 250)$. Montrez que la recette est $R(x) = x(-50x + 12\,500)$.

(c) À l'aide de la calculatrice, dressez le tableau de variation de R puis conjecturez le prix de l'abonnement qui semble assurer la recette maximale.

Exercice 23 pour s'entraîner.

Au quotidien pour exprimer une température, on utilise le degré Celsius (noté °C).

En physique et en chimie on préfère utiliser l'unité de température absolue : le kelvin (noté K).

On sait que :

0 °C correspond à 273,15 K ;

0 K (appelé *zéro absolu*) correspond à −273,15 °C.

On sait aussi qu'une augmentation de 1 °C entraîne une augmentation de 1 K.

1. Soit x une température exprimée en degrés Celsius. Déterminez l'expression $f(x)$ de cette température exprimée en kelvins.
2. Soit x une température exprimée en kelvins. Déterminez l'expression $g(x)$ de cette température exprimée en degrés Celsius.
3. Soit x une température exprimée en kelvin. Calculez $f(g(x))$.

Exercice 24 pour s'entraîner.

Le degré Celsius (noté °C) et le degré Fahrenheit (noté °F) sont deux unités de température.

Dans l'échelle Celsius, la température de fusion de l'eau est de 0 °C et la température d'ébullition est de 100 °C (dans des conditions normales de pression atmosphérique).

Dans l'échelle Fahrenheit, la température de fusion de l'eau est de 30 °F et la température d'ébullition est de 212 °F (dans des conditions normales de pression atmosphérique).

On sait que la relation qui relie degrés Celsius et degrés Fahrenheit est affine.

1. Soit x une température exprimée en degrés Celsius. Déterminez l'expression de $f(x)$ de cette température exprimée en degré Fahrenheit.
2. Soit x une température exprimée en degrés Fahrenheit. Déterminez l'expression de $g(x)$ de cette température exprimée en degré Celsius.
3. Recopiez et complétez le tableau de conversion suivant.

°F	-40	0			23	32	41			68	77			
°C			-15	-10				10	15			30	35	37

Exercice 25 pour s'entraîner.