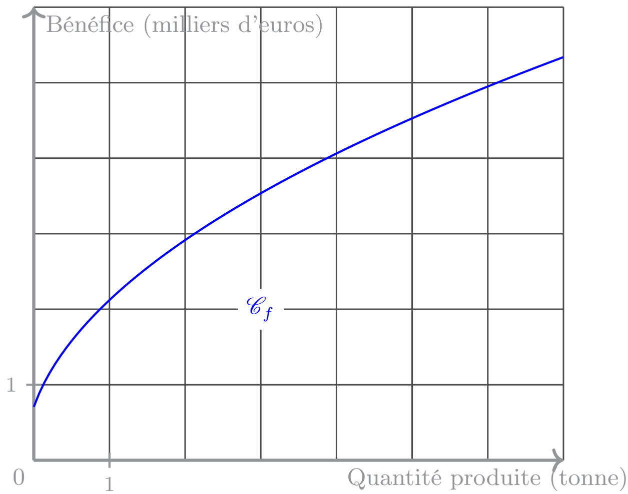
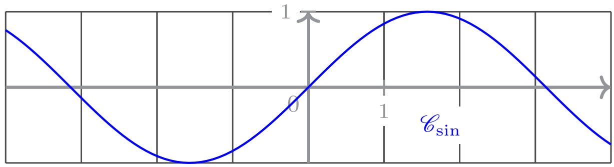
21 Monotonie des fonctions.

Variation et courbe représentative.

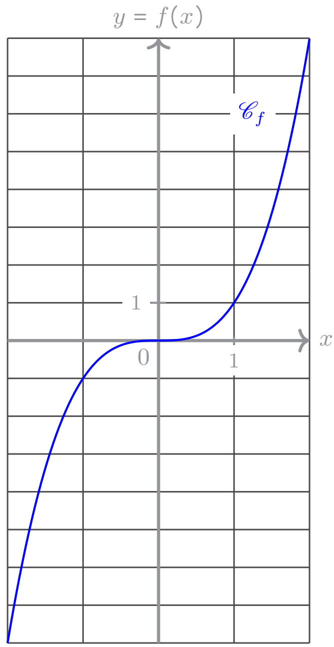
Lorsque nous voyons que la courbe représentative d'une fonction f monte cela traduit le fait que la quantité $f(x)$ augmente à mesure que x augmente. Ci-contre le bénéfice augmente à mesure que la quantité produite augmente.



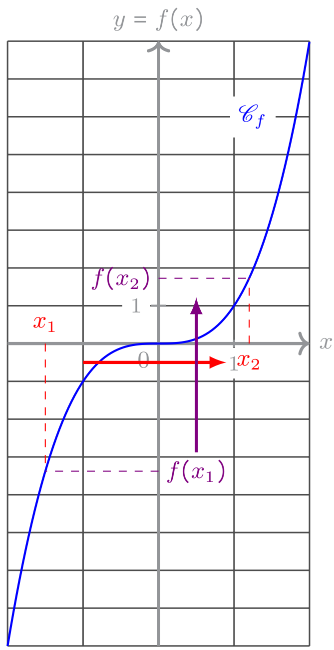
La situation n'est pas toujours aussi simple : il peut y avoir des changement de sens de variation comme pour le sinus ci-dessous.



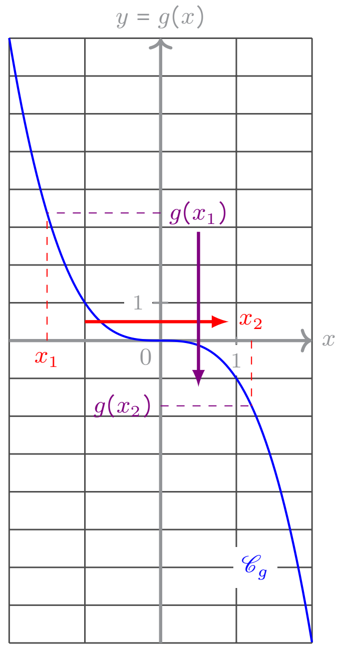
Regardons ce qui se passe dans une situation purement mathématique.Nous allons essayer comme d'habitude d'étudier le géométrique (la courbe monte) en en donnant une interprétation avec des coordonnées.
On a dessiné ci-contre la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto (x - 0{,}001)^2(x + 0{,}001)$.
Nous voyons que la courbe monte. Cela traduit bien le fait que les $f(x)$ augmente à mesure que les x augmentent.



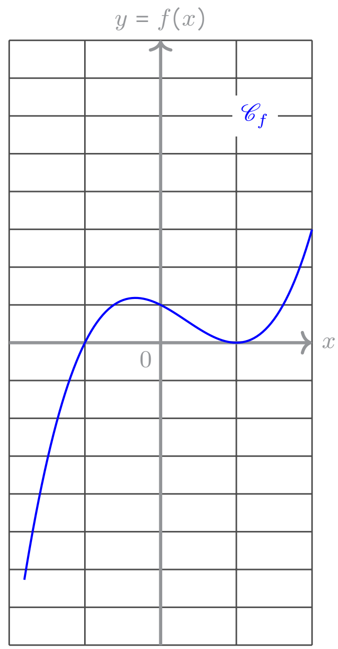
Par exemple si les x passent d'une valeur x_1 à une plus grande valeur x_2 on constate qu'on est passé d'une image $f(x_1)$ à une plus grande image $f(x_2)$.



Alors que si la courbe descend, lorsque les x augment les images $g(x)$ diminuent :



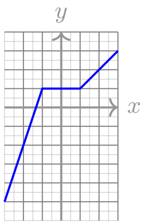
Pourquoi aller regarder ce qui ce passe pour les x et les $f(x)$? Pourquoi ne pas se contenter de la représentation graphique pour dire si ça augmente ou diminue ?
Parce que nous ne pouvons nous fier à nos sens. Agrandissons la courbe représentative au voisinage de 0 en nous plaçant sur $[-2\times10^{-9}, 2\times10^{9}]$. Nous avons besoin d'un outil qui ne peut se tromper : une définition analytique des variations d'une fonction.



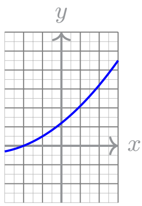
Décrire la variation en français.

Les *fonctions monotones* sont les fonctions dont le sens de variation ne change pas. Graphiquement : la courbe ne fait que monter ou que descendre.

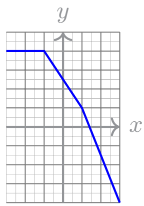
Fonction *croissante.*



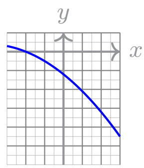
Fonction *strictement croissante.*



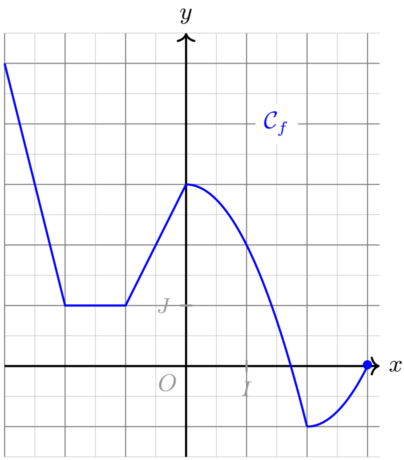
Fonction *décroissante.*



Fonction *strictement décroissante.*



Une fonction n'est pas monotone lorsqu'elle est tantôt croissante tantôt décroissante. Dans ce cas il faut préciser sur quelles parties du domaine de définition elle est croissante ou décroissante.



Nous dirons que :
f est strictement décroissante sur $]-\infty;-2]$,
f est constante sur $[-2;-1]$,
f est strictement croissante sur $[-1;0]$,
f est strictement décroissante sur $[0;2]$,
f est strictement croissante sur $[2;3]$.

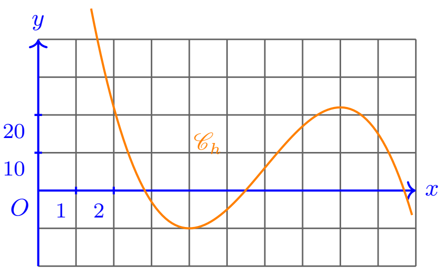
La courbe fait également apparaître des *sommets* (points haut ou bas de la courbe).

Nous dirons que, par exemple, *f admet un minimum (absolu) égale à -1 qui est atteint pour $x = 2$.*

Ou encore que *f admet un maximum local sur $]-2;3[$ qui est égale à 3 et qui est atteint en $x = 0$.*

Exemples.

1. Avec un moyen informatique on obtient la courbe représentative de $h : x \mapsto -x^3 + 18x^2 - 99x + 162$.



Décrivons les variations de h. h est strictement décroissantes sur $]-\infty{,}4]$ et sur $[8,+\infty[$. h est strictement croissante sur $[4;8]$.
Décrivons les extrema. f n'admet aucun maximum ou minimum (absolu). f admet un minimum local sur $]-\infty{,}8[$ égale à -10 qui est atteint en 4 ; f admet un maximum local sur $]4,+\infty[$ égale à 13 qui est atteint en 8.

2. Description de la variation des fonctions de référence : carré, cube, racine carrée, inverse.

Remarques.

1. Ici l'adjectif local utilisé pour parler d'un extremum n'est pas nécessairement pertinente. En effet il n'y a un extremum local que s'il existe un intervalle ouvert sur lequel

la fonction admet un extremum. Si bien qu'un maximum absolu obtenu au borne du domaine de définition n'est pas un maximum local. On parle plutôt d'*extremum relatif à un intervalle* (une partie du domaine de définition). J'ai choisi de parler d'extremum local car cette notion apparaît dans le programme de première.

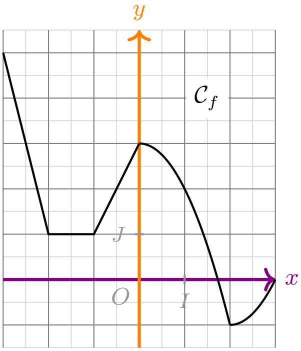
EXERCICE 1. Avec la calculatrice affichez la courbe représentative de la fonction f puis décrivez la variation de f et enfin précisez les extrema de f sur $\mathbb{R}$ dans les cas suivants.

a) $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$.

b) $f : x \mapsto x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 60x + 55$.

Un schéma pour décrire les variations d'une fonction.

Les longues phrases n'étant pas du goût des matheux nous préférerons un schéma. Nous schématiserons la courbe représentative de la fonction par un *tableau de variation*.



x	$-\infty$		-2		-1		0		2		3
f		↘	1	→	1	↗	3	↘	-1	↗	0

Exemples.

1. Une courbe correspondant à une fonction monotone.
2. Une courbe correspondant à une fonction non monotone.
3. Dressons le tableau de variation de la fonction $x \mapsto 0{,}06(x-2)(x-3)(x+5)$ sur $[-10; 10]$ d'après la calculatrice.
4. Proposer une représentation graphique de la fonction f à partir de son tableau de variation.

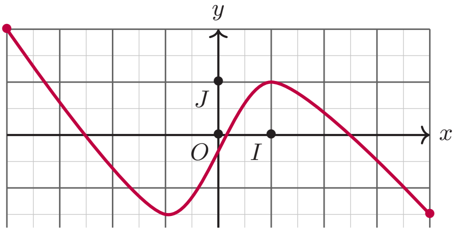
x	0		2		4		$+\infty$
f	2	↘	-1	↗	4	↘	

Remarques.

1. Dans un tableau de variation apparaissent bien sûr les variations mais aussi les *extremum* (*minimum* ou *maximum*, *absolu* ou *local*).
2. Les valeurs dans un tableau de variation sont toutes exactes. Pas de valeur approchée. Comme d'habitude si on ne possède pas la valeur exacte on utilise une lettre pour désigner ce nombre.
3. Il est possible de décrire la variation de la fonction à partir du tableau de variation sans connaître la courbe représentative.

EXERCICE 2. Compléter le tableau de variation proposé à partir de la représentation graphique.

x	-4	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
f	$\cdots$		1	
		$\cdots$		$-1{,}5$



EXERCICE 3. Voici le tableau de variation d'une fonction f.

x	$-\infty$	-2	1	3	5
f			3		4
		2		-2	

a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
b) Décrivez par des phrases le sens de variation de la fonction f.
c) Préciser les extrema éventuels de la fonction f et pour quelle(s) valeur(s) ils sont atteints.
d) Tracer deux courbes différentes susceptibles de représenter graphiquement la fonction f.

EXERCICE 4. On donne le tableau de variation d'une fonction g.

x	-4	-1	2	5
g	2		3	
		-3		-1

a) Quel est l'ensemble de définition de g ?
b) Décrivez par des phrases les variations de g.
c) Tracez dans un repère une courbe pouvant représenter g.

EXERCICE 5. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-2;7]$. On sait que :

- f est strictement croissante sur $[-2;5]$ et sur $[6;7]$;
- f est strictement décroissante sur $[5;6]$;
- $f(-2) = f(6) = -1$ et $f(5) = f(7) = 1$.

Construisez le tableau de variation de f puis tracez dans un repère une courbe pouvant représenter f.

Une vraie définition.

Comme nous l'avons remarqué en introduction nous ne pouvons nous fier à nos yeux, à la calculatrice ou à notre intuition pour connaître la variation d'une fonction. Il nous faut une définition de cette notion qui ne permet aucune ambiguïté. Voici celle qui a été retenue.

Définition 1. Soient f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}_f$, un ensemble E tel que $E \subset \mathscr{D}_f$. Nous dirons que f est *croissante sur E* lorsque, quels que soient x_1 et x_2 choisis dans E, si $x_1 < x_2$ alors, forcément, $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Remarques.

1. Nous pouvons définir de même :
   (a) f est *strictement croissante* ssi dès lors que $\alpha < \beta$ alors forcément $f(\alpha) < f(\beta)$.
   (b) f est *strictement décroissante* ssi dès lors que $\alpha < \beta$ alors forcément $f(\alpha) > f(\beta)$.
   (c) f est *décroissante* ssi dès lors que $\alpha < \beta$ alors forcément $f(\alpha) \geqslant f(\beta)$.
2. Nous retiendrons que *les fonctions croissantes conservent l'ordre tandis que les fonctions décroissantes ne conservent pas l'ordre*.
3. C'est une définition complexe. Il faut comprendre l'idée correspondante : dire que f est *croissante* c'est dire que *quand les x augmentent les $f(x)$ augmentent aussi*. Il faut commencer à se familiariser avec l'aspect technique.
4. Une fonction qui est croissante ou décroissante sur tout son ensemble de définition est dite *monotone*. Il existe des fonctions qui ne sont pas monotone comme la fonction carré.
5. La monotonie de trouver de nouvelles inéquations mais pas d'équivalences. Ainsi, la fonction racine carrée étant croissante, de $x^2 + 1 \leqslant x^2 + 4$, nous pouvons déduire : $\sqrt{x^2+1} \leqslant \sqrt{x^2+4}$.
6. Démontrer qu'une fonction n'est pas monotone sur un ensemble revient à montrer qu'une proposition universelle (quel que soit, pour tout) est fausse : il suffi d'exhiber un contre-exemple.

Exemples.

1. Regarder le paragraphe suivant pour des exemples graphiques de fonctions avec divers sens de variation. Vous connaissez au moins l'allure des courbes représentatives des fonctions de référence et vous pouvez donc conjecturer leur monotonie.
2. Nous avons déjà établi et nous reverrons que la monotonie d'une fonction affine est liée au signe de son coefficient dominant.
3. Nous avons démontré dans la leçon sur racine carrée que c'est une fonction strictement croissante.
4. Démontrons que la fonction cube n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$.
   $1 < 2$ et pourtant $1^3 < 2^3$ car $1^3 = 1$ et $2^3 = 8$.

EXERCICE 6.

1. Démontrez que $(x+1)(x-2) > 0$ pour tout $x \in]2, +\infty[$.
2. Déduisez-en que, pour $x \in]2, +\infty[$, $x^2 - x > 2$.
3. Déduisez-en, finalement que $\sqrt{x^2 - x} > \sqrt{2}$ pour tout $x \in]2, +\infty[$.

Extrema.

Là encore nous allons donner une définition mathématique formelle de la plus grande ou de la plus petite valeur qui soit exempte d'ambiguïté.

Définition 2. Soient f une fonction et un ensemble $E \subset \mathscr{D}_f \subset \mathbb{R}$. On dit que *$f$ admet un maximum sur E* si et seulement si il existe $x_0 \in E$ tel que, quel que soit $x \in E$, $f(x) \leqslant f(x_0)$. Dans ce cas $f(x_0)$ est appelé *le maximum de f sur E*.

Remarques.

1. Nous avons une définition semblable pour le minimum. *f admet un minimum sur E* ssi il existe $x_0 \in E$ tel que : $\forall x \in E$, $f(x) \geqslant f(x_0)$. Dans ce cas $f(x_0)$ est appelé *le minimum de f sur E*.

2. Le terme générique pour parler du maximum ou du minimum est *extremum*. Il est surtout utiliser pour poser des questions sans donner la réponse aux élèves.
3. La définition fait intervenir l'existence d'un nombre ce qui n'est jamais simple à établir. Montrer qu'il y a un maximum ou un minimum peut être très difficile.
4. Le plus souvent au lycée pour démontrer l'existence d'un maximum ou d'un minimum nous utiliserons le tableau de variation.
5. Pour montrer qu'une fonction n'a pas de maximum il faut montrer qu'il y a toujours une image plus grande que n'importe quel maximum putatif. Deux cas : inverse sur $\mathbb{R}_-$ et cube sur $\mathbb{R}_+$.

Exemples.

1. La fonction carré n'admet pas de minimum sur $]0;2]$ mais admet un maximum en 2 égale à 4. La fonction carré est croissante sur]0,2] donc sont minimum ne pourrait être qu'en 0 mais 0 ne fait pas partie de l'ensemble de définition.
2. La fonction cube n'admet ni minimum ni maximum.
3. Montrons que la fonction $g : x \mapsto -2(x+1)^2 + 3$ admet un maximum sur $\mathbb{R}$ en -1.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $$\begin{aligned}(x+1)^2 &\geqslant 0\\ -2(x+1)^2 &\leqslant -2\times 0, \text{ car -2<0}\\ -2(x+1)^2 &\leqslant 0\\ -2(x+1)^2+3 &\leqslant 0+3\\ g(x) &\leqslant 3\end{aligned}$$
   De plus $g(-1) = 3$.
   $$\boxed{g \text{ admet, sur } \mathbb{R}, \text{ un maximum égale à 3 qui est atteint en } -1.}$$
4. La fonction inverse est minorée, par 0, sur $\mathbb{R}_+$ (elle ne prend pas de valeur plus petite que 0) mais elle n'admet pas de minimum car la valeur 0 n'est jamais atteinte.

EXERCICE 7. Montrez que $f : x \mapsto 7(x-15)^2 - 9$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 8. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{9-x^2}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

1. (a) Résolvez algébriquement l'équation $f(x) = -1$.
   (b) Montrez que pour tout réel x, $f(x) \geqslant -1$. *Pour comparer deux nombres on peut chercher le signe de leur différence.*
   (c) -1 est-il le minimum de f sur $\mathbb{R}$?
2. En utilisant la calculatrice tracez la courbe de f dans un repère bien choisi.
3. Conjecturez le maximum de f sur $[-5;5]$ et en quelle valeur il est atteint.
4. Démontrez que tous les réels ont une image inférieure ou égale à 9 et validez la conjecture précédente.

Variation des fonctions affines.

Exemples.

1. Montrons que la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2x+1$ est strictement croissante conjecture établie avec une calculatrice.
   Il faut démontrer que quelque soient les nombres α et β choisis avec $\alpha < \beta$ on a forcément $f(\alpha) < f(\beta)$.

Soient α et β deux nombres réels tels que $\alpha < \beta$. Il faut garder des lettres et ne pas remplacer par des valeurs numériques pour que le résultat reste général, vrai quelque soit les nombres choisis. Démontrons qu'alors nécessairement $f(\alpha) < f(\beta$.

Le raisonnement consiste à partir de l'inégalité $\alpha < \beta$ et de reconstruire la fonction f de par et d'autre d façon à faire apparaître $f(\alpha)$ et $f(\beta)$. Pour cela nous ferons les étapes correspondant aux priorités opératoires.
L'inégalité $\alpha < \beta$ est successivement équivalente à

$$2\alpha < 2\beta, \text{ le sens est conservé car } 2 > 0.$$
$$2\alpha + 1 < 2\beta + 1$$
$$f(\alpha) < f(\beta)$$

Nous avons démontré que si $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) < f(\beta)$. Les images et les antécédents sont rangés dans le même ordre.
Ceci étant vrai quelque soit les α et β choisis nous pouvons affirmer que la fonction f est strictement croissante.

Proposition 1. Soient a et b deux nombres réels, f la fonction affine définie par : $f(x) = ax + b$ quelque soient $x \in \mathbb{R}$.

(i) Si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
(ii) Si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.
(iii) Si $a < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Si $a = 0$ la fonction est évidemment constante.

Démontrons l'un des deux cas restants l'autre se traitant de la même façon. Supposons par exemple que $a < 0$.

Il faut démontrer que f est strictement décroissante. D'après la définition de la monotonie, il faut donc montrer que quels que soient les nombres réels α et β si $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) > f(\beta)$.

Soient α et β deux nombres réels tels que $\alpha < \beta$. Cette inégalité est successivement équivalente à :

$$a\alpha > ax\beta \text{ car } a < 0$$
$$a\alpha + b > a\beta + b$$
$$f(\alpha) > f(\beta)$$

On a donc démontrer que si $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) > f(\beta)$. Autrement dit f est strictement décroissante.

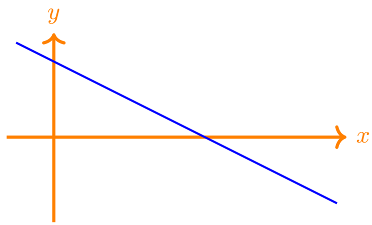
Exemples.

1. Étudions les variations de la fonction h, définie par $h(x) = -12x + 3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. h est une fonction affine avec $a = -12$ et $b = 3$. Comme $a < 0$, h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. Nous ne pouvons rien dire pour $x \mapsto 2x^2 - 3x + 1$ car ce n'est pas une fonction affine.

La connaissance des variations de la fonction affine permet de retrouver les tableaux de signes en raisonnant à partir de la courbe représentative.

Exemples.

1. Étudions par exemple le signe de $f : x \mapsto -2x + 4$.
   * f est une fonction affine avec $a = -2$ et $b = 4$.
   * le coefficient directeur est strictement négatif, $a < 0$ donc f est strictement décroissante.
     Ceci se traduit graphiquement par une droite qui descend. Quelque chose comme :



Nous voyons sur ce schéma que la fonction prend d'abord des valeurs positives puis des valeurs négatives. Autrement dit nous pouvons déjà compléter le tableau de signe de la façon suivante :

x	$-\infty$		?		$+\infty$
f		$+$	0	$-$	

Il nous reste à trouver pour quelle valeur de x, f s'annule.

* f s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{4}{-2} = 2$. Ce résultat a été établi plus tôt dans cette leçon.

Nous en déduisons le tableau de signe de f.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f		$+$	0	$-$	

Démonstrations pour les fonctions de référence.

La façon la plus simple de retenir les résultats de cette partie consiste à connaître par cœur les allures des courbes représentatives des fonctions de référence.

Proposition 2. Tableau de variations de la fonction carrée :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto x^2$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Démonstration. Montrons que la fonction carrée est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Soient x_1 et x_2 deux nombres quelconques dans $[0\ ;\ +\infty[$ tels que : $x_1 < x_2$.

D'une part :

$$x_1^2 \leq x_2 \times x_1, \text{ car } x_1 \geq 0$$

et d'autre part :

$$x_1 x_2 < x_2^2, \text{ car } x_2 x_2 > x_1 \geq 0$$

On en déduit :

$$x_1^2 \leq x_1 x_2 < x_2^2$$

et donc $x_1^2 < x_2^2$.

Nous avons démontrés que la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Montrons que la fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$.
Soient x_1 et x_2 deux nombres quelconques dans $]-\infty\ ;\ 0]$ tels que : $x_1 < x_2$.
D'une part :

$$x_1^2 > x_2 \times x_1,\text{ car } x_1 x_1 < x_2 \leq 0$$

et d'autre part :

$$x_1 x_2 \geq x_2^2,\text{ car } x_2 x_2 \leq 0$$

On en déduit :

$$x_2^2 \leq x_1 x_2 < x_1^2$$

et donc $x_2^2 < x_1^2$.

Nous avons démontrés que la fonction carrée est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Remarques.

1. Autrement dit : la fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Exemples.

1. Montrons que $\left(\frac{4}{12}\right)^2 < \left(\frac{9}{24}\right)^2$. Puisque $\frac{4}{12} = \frac{8}{24}$ nous voyons que $\frac{4}{12} < \frac{9}{24}$. La fonction carré étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\left(\frac{4}{12}\right)^2 < \left(\frac{9}{24}\right)^2.$$

2. Montrons que si $x \leqslant -6$ alors $x^2 \geqslant 36$. Soit x un réel tel que $x \leqslant -6$.
La fonction carré étant décroissante sur $\mathbb{R}_-$: $x^2 \geqslant 36$.

Quelque soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \leqslant -6$, $x^2 \geqslant 36$.

EXERCICE 9. Dans chaque cas comparez les nombres A et B sans utiliser la calculatrice.

a) $A = \left(\frac{3}{4}\right)^2$ et $B = \left(\frac{4}{3}\right)^2$, b) $A = 1{,}009^2$ et $B = 1{,}0029^2$, c) $A = -2{,}3^2$ et $B = (-2{,}3)^2$.

Exercice 9.

a) Comparons A et B.
Nous allons utiliser le fait qu'une fonction croissante conserve l'ordre.

La fonction carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
Or $\frac{3}{4} < 1 < \frac{4}{3}$ et $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{3}$ sont dans $[0; +\infty[$ donc

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 < \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

b) Comparons A et B.

La fonction carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
Or $1{,}0029 < 1{,}009$ et $1{,}0029$ et $1{,}009$ sont dans $[0;+\infty[$ donc

$$\boxed{1{,}0029^2 < 1{,}009^2}$$

c) Comparons A et B.
$-2{,}3^2$ n'est pas une image par la fonction carrée. La précédente méthode ne fonctionnera donc pas.

Clairement : $-2{,}3^2 < 0 < (-2{,}3)^2$

$$\boxed{-2{,}3^2 < (-2{,}3)^2}$$

EXERCICE 10. Encadrez x^2, puis $3x^2$, le plus précisément possible, dans les cas suivants :

a) $1 \leq x \leq 4$,
b) $-2 \leq x < -0{,}5$,
c) $4 < x < 11$,
d) $-\frac{13}{5} < x < -\frac{1}{7}$.
e) $-2 \leq x < 3$,
f) $-10 \leq x \leq 10$.

Exercice 10. Pour avoir un résultat très précis il faut raisonner algébriquement (en raisonnant par disjonction des cas pour les deux derniers). Sinon une résolution graphique convient. Cette dernière est ici plus simple et efficace.

EXERCICE 11. Démontrez que la fonction $f : x \mapsto 4x^2 + 3x - 12$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Proposition 3. Tableau de variation de la fonction inverse :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

Démonstration.

Nous allons démontrer trois choses : la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$, sur $\mathbb{R}_+^*$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

* Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_-^*$ tels que $x_1 < x_2$.
  Donc

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} &> \frac{x_2}{x_2} \quad \text{car } x_2 < 0 \\ \frac{x_1}{x_2} &> 1 \\ \frac{1}{x_1} \times \frac{x_1}{x_2} &< \frac{1}{x_1} \times 1 \quad \text{car } \frac{1}{x_1} < 0 \\ \frac{1}{x_2} &< \frac{1}{x_1} \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\text{la fonction inverse est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_-^*.}$$

* Idem pour $\mathbb{R}_+^*$.
* $-2 < 2$ et pourtant $-\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ donc la fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$.

Nous avons déjà remarqué qu'il n'est pas possible d'obtenir des identités remarquables, des égalités, liant la somme et la racine carré. Cependant nous pouvons obtenir une inégalité.

Proposition 4. Soient $a \in [0; +\infty[$ et $b \in [0; +\infty[$. Si $a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Démonstration.

Supposons $a < b$ et démontrons que $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Nous allons en fait démontrer que $\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$.

Puisque $a < b$:

$$b - a > 0.$$

Or, a et b étant positifs,

$$\begin{aligned} b - a &= \sqrt{b}^2 - \sqrt{a}^2 \\ &= \left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b} + \sqrt{a}\right) \end{aligned}$$

donc

$$\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b} + \sqrt{a}\right) > 0$$

Et comme $\left(\sqrt{b} + \sqrt{a}\right) > 0$:

$$\frac{\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b} + \sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{b} + \sqrt{a}\right)} > \frac{0}{\left(\sqrt{b} + \sqrt{a}\right)}$$

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$$

Ainsi dès que $a < b$ forcément $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Remarques.

1. Nous verrons que ce résultat établit que la fonction racine carrée est strictement croissante (sa courbe représentative ne cesse de monter).
2. Ce résultat constitue une nouvelle façon de transformer une inéquation. Lorsque nous verrons $x^2 + x^4 < 8 + x^2$ alors nous pourrons affirmer que $\sqrt{x^2 + x^4} < \sqrt{8 + x^2}$.

Proposition 5. Tableau de variations de la fonction racine carrée :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$x \mapsto \sqrt{x}$	0 $\nearrow$

Démonstration. Ce résultat a été établi dans le lemme.

Proposition 6. Tableau de variations de la fonction cube :

x	$-\infty$	$+\infty$
$x \mapsto x^3$	$\nearrow$	

Démonstration.

* Démontrons que la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Nous allons utiliser une identité remarquable qui vous est encore inconnue :

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2$.
Démontrons que $x_1^3 < x_2^3$.
Ou plutôt, ce qui revient au même démontrons que $x_2^3 - x_1^3 > 0$.
Pour étudier le signe d'une expression il vaut mieux qu'elle soit factorisée : $x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^3)$.
D'une part, par hypothèse,

$$x_2 - x_1 > 0.$$

D'autre part, puisque $0 \leqslant x_1 < x_2$: $x_1 \geqslant 0$, $x_1x_2 \geqslant 0$ et $x_2^2 > 0$ donc

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 > 0.$$

Donc :

$$(x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^3) > 0.$$

Ainsi, si $0 \leqslant x_1 < x_2$ alors $x_1^3 < x_2^3$.
Autrement dit

$$\boxed{\text{la fonction cube est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

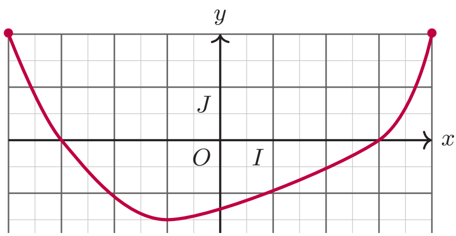
* La fonction cube étant impaire nous en déduisons par symétrie, que la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$.

* Il reste à s'assurer que si $x_1 \leqslant 0 \leqslant x_2$ nous avons toujours conservation de l'ordre.

Exercices.

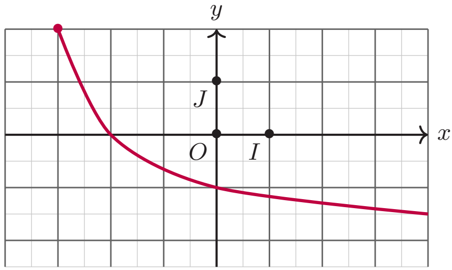
EXERCICE 12. Compléter le tableau de variation proposé à partir de la représentation graphique.

x	-4		4
f	2 $\searrow$		$\nearrow$ 2



EXERCICE 13. Compléter le tableau de variation proposé à partir de la représentation graphique.

x	-3	$\cdots$
f		



EXERCICE 14. Un véhicule commence son trajet au niveau de la mer à 7h00. Il grimpe jusqu'à un sommet d'une montagne à une altitude de 824 m. Il atteint ce sommet à 9h00 puis descend sur l'autre flanc de la montage jusqu'à une vallée située à une altitude de 522 m. Son arrivée à lieu à 10h00.

On note f la fonction qui au temps écoulé depuis le départ du véhicule associe l'altitude du véhicule. Proposez un tableau de variation pour f.

EXERCICE 15.

x	-2		0		3		4
f			$\frac{5}{2}$				6
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	-1				-1		

Comparer si possible les nombres suivants.

a) $f(-2)$ et $f(-1)$ b) $f\left(\frac{1}{3}\right)$ et $f\left(\frac{3}{2}\right)$ c) $f(-1)$ et $f(1)$

d) $f(3{,}6)$ et $f(3{,}7)$ e) $f\left(\frac{7}{2}\right)$ et $f(4)$ f) $f(1)$ et $f(3{,}5)$

EXERCICE 16. Déterminez si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Si f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. Si la fonction f est croissante sur $[-5; 5]$ alors elle est croissante sur $[0; 1]$.
3. Si f est croissante sur $[-5; 0]$ et décroissante sur $[0; 5]$ alors f est constante sur $[-5; 5]$.
4. Si $f(1) \geqslant f(6)$ alors f est décroissante sur $[1; 6]$.

EXERCICE 17. Tracez une courbe pouvant représenter graphiquement la fonction g dont le tableau de variation est donné.

x	-5		0		1		2
g			5				-1
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	2				-4		

EXERCICE 18. Voici le tableau de variations d'une fonction f.

x	-4		-1		2		5
f	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1

a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
b) Décrivez par des phrases le sens de variation de la fonction f.
c) Préciser les extrema éventuels de la fonction f et pour quelle(s) valeur(s) ils sont atteints.
d) Tracer une courbe pouvant représenter graphiquement la fonction f.

EXERCICE 19. Voici le tableau de variations d'une fonction f.

x	-1		0		2		$+\infty$
f	-2	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	

a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
b) Décrivez par des phrases le sens de variation de la fonction f.
c) Préciser les extrema éventuels de la fonction f et pour quelle(s) valeur(s) ils sont atteints.
d) Tracez une courbe pouvant représenter graphiquement la fonction f.

EXERCICE 20. On considère une fonction f dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

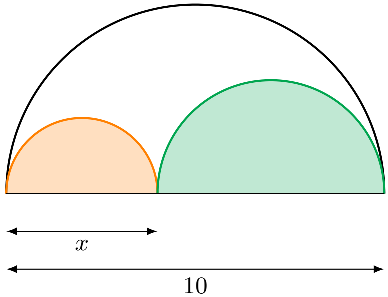
x	-4		1		5
f	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3

1. Décrivez par des phrases les variations de f.
2. Comparez les nombres :

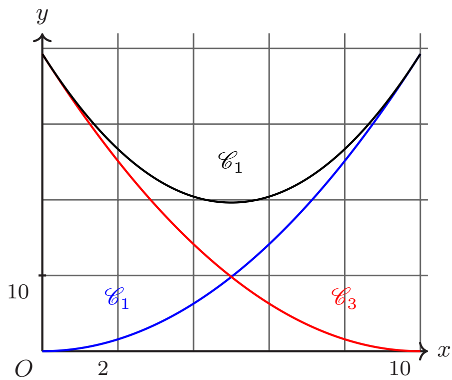
a) $f(2)$ et $f(4)$.
b) $f(-3)$ et $f(0)$.

3. Expliquez pourquoi on ne peut comparer $f(0)$ et $f(2)$.

EXERCICE 21. On considère trois demi-cercles tels que représentés ci-dessous.



1. Conjecturez l'évolution de l'aire du demi-disque orange et celle du demi-disque vert lorsque x augmente.
2. Soient f (respectivement g, resp. h) la fonction définie sur $]0; 10[$ qui à x associe l'aire du demi-disque orange (resp. du demi-disque vert, de la partie colorée).
   On a tracé ci-contre les courbes représentatives des fonctions f, g et h.
   (a) Associez à f, g et h leurs courbes représentatives.
   (b) Avec la précision permise par le graphique décrivez les variations de h.



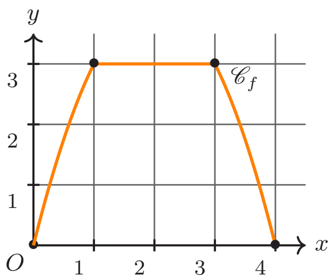
EXERCICE 22. Conjecturez la variation de f sur I dans les cas suivants.

a) $f : x \mapsto 0{,}1x^4 - 0{,}8x^2 - 1$ et $I = [-4; 4]$.
b) $f : x \mapsto x^3 - 0{,}8x^2 + 1$ et $I = [-2; 3]$.

EXERCICE 23. Montrez que la fonction $f : x \mapsto x^3 + \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
EXERCICE 24. La fonction f est définie, sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

1. Conjecturez l'existence d'un maximum en précisant sa valeur et la valeur pour laquelle il est atteint.
2. Démontrez que, pour tout réel x, $f(x) \leqslant 1$.
3. Démontrez que 1 est le maximum de f.

EXERCICE 25. On représentée une fonction définie sur $[0; 4]$.



1. Résolvez graphiquement l'équation $f(x) = 3$.
2. Décrivez par des phrases en français les variations de f sur son domaine de définition.
3. La fonction f admet-elle un maximum sur $[0; 4]$? Si oui, combien vaut-il et pour quelles valeurs de x est-il atteint ?

EXERCICE 26. Une fonction f définie sur l'intervalle $[-6;8]$, vérifie :

- f est croissante sur les intervalles $[-6,-2]$ et $[4;8]$;
- f est décroissante sur $[-2;4]$;
- $f(-2) = 4$;
- le minimum de f sur $[-6;8]$ est égale à -3 et est atteint pour $x = 4$.

1. Dressez le tableau de variation de f avec les données ci-dessus.
2. Le nombre 2 a au moins deux antécédents par f : -4 et 8. De plus la courbe représentative de f dans un repère passe par les points $A(-6,-2)$ et $B(6,-2)$ et qu'elle coupe l'axe des ordonnées au point C d'ordonnée 3. Complétez le tableau de variation avec toutes les informations supplémentaires concernant f et sa courbe représentative.
3. Tracez une courbe satisfaisant à toutes les conditions concernant f et précisez les coordonnées de C.
4. (a) Quel est le nombre d'antécédents de 2 ?
   (b) En combien de points la courbe tracée coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Traduisez ce résultat en termes d'antécédents.
5. Pouvez-vous imaginer plusieurs courbes satisfaisant toutes les conditions sur f ?

EXERCICE 27. Voici des informations concernant une fonction f définie sur l'intervalle $[-1;5]$.

- $f(-1) = f(5) = 0$
- $f(2) = 3$
- $f(4) = -2$
- f est croissante sur $[-1;2]$ et sur $[4;5]$;
- f est décroissante sur $[2;4]$.

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Tracer deux courbes différentes susceptibles de représenter graphiquement la fonction f.
3. Préciser les extremums éventuels de la fonction f et pour quelle(s) valeur(s) ils sont atteints.

EXERCICE 28. Pour chaque tableau de variations ci-dessous, déterminez si la fonction représentée admet :

— un maximum et/ou un minimum ;
— absolu et/ou local.

1.

x	$-\infty$		0		9
$f(x)$		↘	$+8$	↗	

2.

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$g(x)$		↘	-10	↗	8	↘	

3.

x	$-\infty$		-2		7		$+10$
$h(x)$		↗	0	↘	-30	↗	7

4.

x	$-\infty$		15		$+\infty$
$m(x)$		↗	25	↘	

5.

x	1		$+\infty$
$p(x)$	-5	↗	

EXERCICE 29. En utilisant les tableaux de variation, de valeurs et de signe de la fonction f donnée ci-dessous, dessinez avec soin, dans un repère, une courbe représentative cohérente avec ces trois tableaux.

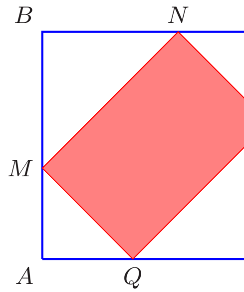
x	-6		-1		3		5
f	-5	↗	1	↘	-4	↗	6

x	-4	1	4
$f(x)$	-3	$0{,}5$	5

x	-6		-2		2		$3{,}5$		5
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

EXERCICE 30. Exercices 7 page 121 jusqu'à 12 page 122 : passer de la courbe au tableau de variation et réciproquement.

EXERCICE 31. Soit $ABCD$ le carré de côté 5 représenté ci-contre.
M, N, P et Q sont des points mobiles respectivement sur les segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ de telle sorte que les longueurs AM, AQ, CN et CP restent égales.
On a donc : $AM = AQ = CN = CP$.
Le problème a pour objectif d'étudier l'aire (variable) du quadrilatère $MNPQ$.



1. Choix d'une variable.

   (a) À quelle(s) variable(s) peut-on associer l'aire de $MNPQ$?
   (b) On note $x = AQ$. Quelles sont les valeurs que peut prendre x ?

2. Détermination de l'aire par un calcul.

   (a) Exprimez en fonction de x l'aire de chacun des triangles AMQ et BMN.
   (b) Déduisez-en que l'aire du quadrilatère $MNPQ$ se calcule avec la formule $10x - 2x^2$.
   (c) Précisez, avec les notations fonctionnelles, la fonction f que l'on a construit.

3. Découverte des variations de la fonction f.

   (a) Recopiez et complétez le tableau de valeurs ci-dessous pour $f(x) = 10x - 2x^2$.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$											

   (b) Une autre façon de voir les choses est de tracer la courbe représentative de f avec la calculatrice.
   Qu'apporte de plus cette méthode par rapport à la précédente ?
   (c) Comment varie $f(x)$ lorsque x augmente ?
   (d) Tracez le tableau de variation de la fonction f sur son ensemble de définition.
   (e) Comment obtenir une aire maximale pour $MNPQ$?

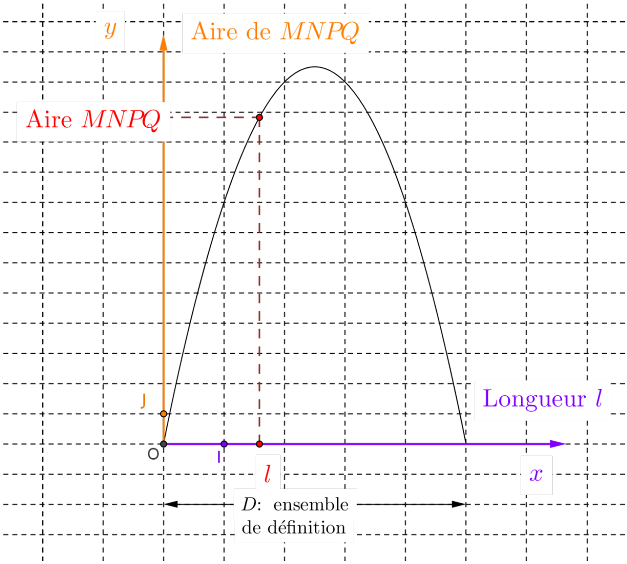
4. Les résultats ont-ils été démontrés ou conjecturés ?

Exercice 31.

1. (a)
   (b)
2. (a)
   (b)
   (c)
3. (a)

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$	0	4,5	8	10,5	12	12,5	12	10,5	8	4,5	0

   (b)



Cliquez sur l'image pour obtenir la version dynamique.

(c) — lorsque x augmente passant de 0 à 2,5 l'aire $MNPQ$ augmente elle aussi passant de 0 à 12,5 ;
— lorsque x augmente encore passant de 2,5 à 5 l'aire de $MNPQ$ au contraire diminue passant progressivement de 12,5 à 0.

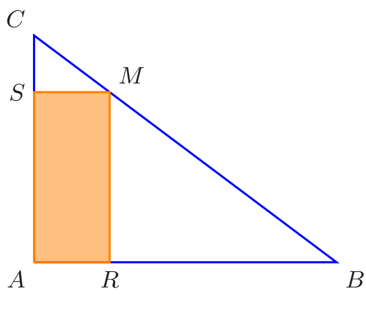
(d)

x	0	2.5	5
f	0 ↗	12.5	↘ 0

(e)

4.

EXERCICE 32. On considère le triangle ABC rectangle en A avec $AB = 8$ et $AC = 6$. Un point R est mobile sur le segment $[AB]$. On place les points M et S sur les segments $[BC]$ et $[AC]$ de telle sorte que $ASMR$ soit un rectangle.



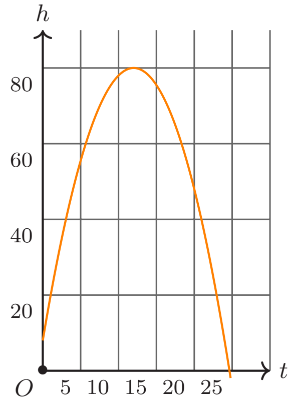
On considère la fonction f qui à la longueur AR associe l'aire du rectangle $ASMR$.
On cherche ici à rendre l'aire du rectangle maximale.

1. Dessinez à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique la figure. On s'assurera de la réussite de la construction de la façon suivante : lorsqu'on déplace le point R sur le segment $[AB]$, le quadrilatère $ASMR$ reste un rectangle.
2. Dessinez le polygone (avec la commande correspondante dans geogebra) $ASMR$ et remarquez que l'aire du rectangle est alors indiquée dans la colonne algèbre.
3. En déplaçant le point R conjecturez l'aire maximale du rectangle $ASMR$.

EXERCICE 33. À l'occasion d'un festival pyrotechnique, un artificier prépare le lancement de fusées à partir d'une plateforme située à 8 mètres de hauteur. Il dispose de deux types de fusées notées A et B.

Partie A : fusées de type A.

Le hauteur h, en mètres, atteinte par les fusées de type A en fonction de leur temps de vol t, en dixièmes de seconde, est modélisée par la courbe ci-contre.



1. Précisez les légendes et unités pour chaque axe du graphique.
2. Avec la précision permise par le graphique répondez aux questions suivantes.
   (a) À quelle hauteur une fusée arrive-t-elle au bout de 15 dixièmes de seconde ?
   (b) À quels temps de vol la hauteur d'une fusée est-elle égale à 40 m ?
   (c) Quelle est la hauteur maximale atteinte par une fusée ?
   (d) Au bout de combien de temps retombe-t-elle au sol ?
   (e) Décrivez en français la variation de la hauteur et tracez le tableau correspondant.

Partie B : fusées du type B.

Pour les fusées du type B, la hauteur, en mètres, en fonction du temps de vol, en dixièmes de seconde, est modélisé par la fonction g définie par $g(t) = -0{,}5(t-10)^2 + 58$ pour tout t appartenant à l'intervalle $[0; 20]$.

1. Calculez l'image de 6 par g. Que représente le résultat ?
2. Donnez le tableau de valeur de g pour t allant de 0 à 20 avec un pas de 2.
3. Déduisez-en au bout de quels temps de vol la hauteur d'une fusée est de 40 m.
4. L'artificier souhaite faire exploser ses fusées de type B lorsqu'elles seront à la hauteur maximale.
   (a) Déterminez le temps de vol qu'il doit programmer avant l'explosion.
   (b) Quelle est alors la hauteur maximale atteinte ?

EXERCICE 34.