Signe des fonctions et inéquations.

Analyse ou géométrie.

L'analyse (les fonctions) et la géométrie (courbe représentative) se nourrissent mutuellement. Cette leçon du point de vu géométrique cherche à répondre à la question : la courbe représentative de la fonction f est-elle au dessus ou au dessous de l'axe des abscisses ? Du point de vu analytique la question est : quelle est le signe de $f(x)$?

Nous verrons également un prolongement de ces questions : conjecturer par lecture graphique la résolution d'équations et d'inéquations.

Signe d'un nombre.

Le signe d'un nombre x prend trois valeurs différentes :

— *strictement positif* si $x > 0$,
— *strictement négative* si $x < 0$,
— *nul* si $x = 0$.

Remarques.

1. Il y a trois signes différents et non pas deux comme le croient nombre d'élèves.

Signe d'une fonction.

Définition 1. Soient E un ensemble de nombres réels, $f : E \to \mathbb{R}$ une application. On appelle *signe de f* la donnée du signe de $f(x)$ pour chaque $x \in E$.

Exemples.

1. $f : x \mapsto 2x + 3$. Pour $x = -1$, $f(x) = 1 > 0$. Pour $x = -3$, $f(x) = -3 < 0$. Pour $x = -\frac{3}{2}$. Les signes de ces trois images par la fonction f ne suffisent pas : il faut donner le signe de toutes les images.
2. La fonction carrée est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$ et nulle en 0.

Remarques.

1. Le signe d'une fonction doit être donné pour toutes les valeurs de x et pas uniquement pour quelques-unes. Il y a, en général, une infinité de valeurs possibles pour x, nous décrirons donc le signe d'une fonction par intervalles de l'ensemble de définition : « sur tel intervalle la fonction est strictement positive ».

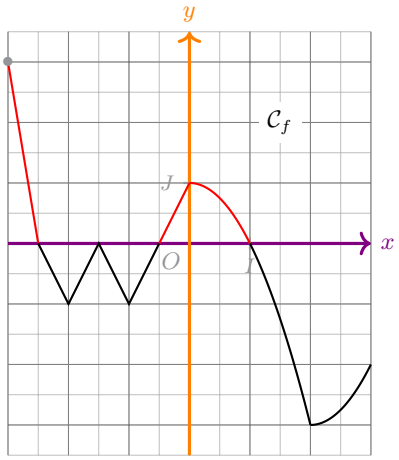
Tableau de signe.

Plutôt que de partir stricto sensu de la géométrie nous allons faire de la lecture graphique et donc conjecturer des résultats.

Le *tableau de signe* d'une fonction est une schématisation de sa courbe représentative qui indique le signe de $f(x)$ en fonction de la valeur de x.

Le tableau de signe indique donc les plus grands intervalles des valeurs prisent par x, pour lesquelles :

— la fonction f est *strictement positive*,
— la fonction f est *strictement négative*,
— la fonction f est *nulle*.



Graphiquement les points de la courbe au-dessus de l'axe des abscisses correspondent à des valeurs positives de la fonction.

Nous décrirons cette situation en disant, par exemple :
f est strictement positive sur $[-3; -2{,}5[$,
f est strictement négative sur $]-2{,}5; -1{,}5[$,
f s'annule en chaque valeur de $\{-2{,}5; -1{,}5; -0{,}5; 1\}$.

Nous résumerons tout ceci dans le tableau de signe :

x	-3		$-2{,}5$		$-1{,}5$		$-0{,}5$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Remarques.

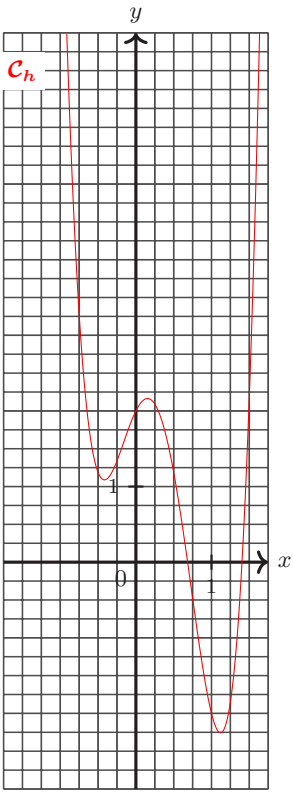
1. On attend de l'élève qu'il soit capable de décrire à l'oral le signe : « la fonction est strictement positive sur l'intervalle » et cetera.
2. Remarquez le décalage des inscriptions des signes sur la ligne du dessous et des nombres sur la première ligne. le signe est indiqué au milieu en dessous de l'intervalle qui est concerné.
3. Il est encore possible d'interpréter ces résultats en termes d'inéquations :
   — $f(x) > 0$ si et seulement si $x \in [-3; -2{,}5[\cup]-0{,}5; 1[$,
   — $f(x) < 0$ si et seulement si $x \in]-2{,}5; -1{,}5[\cup]-1{,}5; -0{,}5[\cup]1; 3]$,
   — $f(x) = 0$ si et seulement si $x \in \{-2{,}5; -1{,}5; -0{,}5; 1\}$

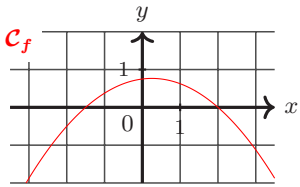
Exemples.

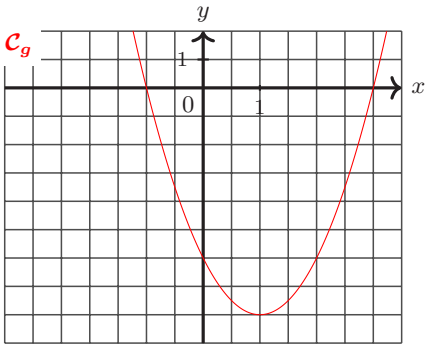
1.

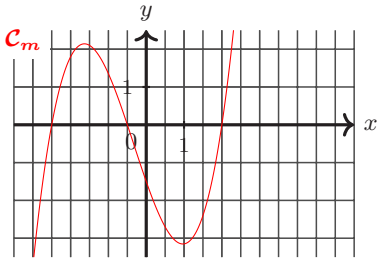
Conjecturer graphiquement le signe d'une fonction.

EXERCICE 1. Dresser les tableaux de signes des fonctions représentées ci-dessous.

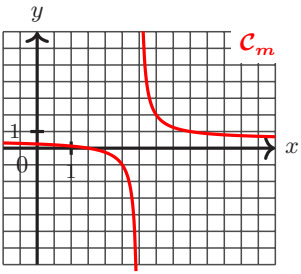


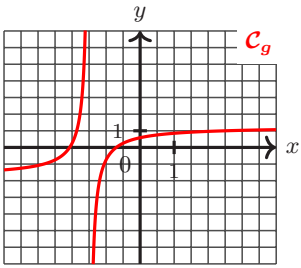


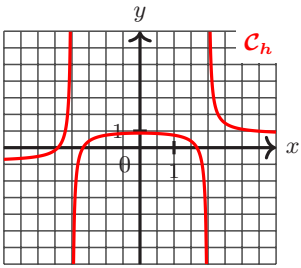




EXERCICE 2. À partir de chaque représentation graphique déterminez les valeurs pour lesquelles la fonction n'est pas définie, la fonction est nulle puis établissez le tableau de signes de cette fonction.







EXERCICE 3. Un artisan fabrique des vases qu'il met en vente. On suppose que tous les vases fabriqués sont vendus. L'artisan veut faire une étude sur la production d'un nombre de vases compris entre 0 et 60. Il estime que le bénéfice occasionné par la production puis la vente de n vases est modélisé par la fonction B dont l'expression est $B(n) = -n^2 + 60n - 500$.

1. Dessinez la courbe représentative de la fonction B sur $[0; 60]$.
2. Par lecture graphique donnez le tableau de signe de B.
3. Quel nombre de vases l'artisan doit-il fabriquer puis vendre pour réaliser un bénéfice ?

4. Quel nombre de vases l'artisan doit-il fabriquer puis vendre pour réaliser un bénéfice maximal ?

De l'analyse vers la géométrie.

Le plus souvent notre démarche en mathématique est celle contraire : à partie de l'expression algébrique déterminer si la courbe est au-dessus ou en-dessous de l'axe des abscisses.

Il n'existe pas de recette magique pour l'étude (démontrée) du signe d'une fonction. Cependant vous devez connaître déjà celles-ci :

Étape 1 si la fonction fait partie des fonctions de référence (identité, carré, cube, racine carrée, inverse, valeur absolue) vous devez connaître par cœur son signe,

Étape 2 si la fonction fait partie de la classe des fonctions affines vous devez être capable d'en déterminer le signe (résultats de cours ou résolution d'inéquations du premier degré),

Étape 3 si la fonction est un quotient ou un produit de fonctions de références ou affines vous devez utilisez des tableaux de signe et les deux points précédents,

Étape 4 sinon, pour l'instant il ne vous reste que la conjecture grâce à un moyen informatique (ce qui pour des maths appliquées peut s'avérer très satisfaisant).

Il vous reste à consulter les leçons concernées.

Position relative de deux courbes.

Définition 2. Soient I un intervalle, f et g des fonctions définies sur I. *La courbe représentative* $\mathscr{C}_f$, de f, est dite *au-dessus de la courbe représentative* $\mathscr{C}_g$, de g, *sur* I si et seulement si : $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in I$.

Remarques.

1. On peut faire une définition semblable pour définir le fait qu'une courbe est au-dessous d'une autre.
2. Rappelons que la principale méthode dont vous disposez pour résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$ consiste à résoudre $f(x) - g(x) \geqslant 0$. Bref il s'agit d'étudier le signe de la fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$ (tableau de signe et tout et tout).
3. Il arrive qu'une partie seulement de $\mathscr{C}_f$ soit au-dessus de $\mathscr{C}_g$. Dans ce cas nous détaillerons sur quels intervalles c'est vrai.

Exemples.

1. La courbe représentative de la fonction constante égale à 3 est au-dessus de la courbe représentative de la fonction constante égale à $-\pi$ car $-\pi \leqslant 3$.
2. Soit $f : x \mapsto 3x + 1$ et $g : x \mapsto -7x + 3$.
   Étudions le signe de $f - g$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x) - g(x) = 10x - 2$. $f - g$ est une fonction affine avec $a = 10$ et $b = -2$ donc

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$f - g$		$-$	0	$+$	

   Nous en déduisons que

$$\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est au-dessus de } \mathscr{C}_g \text{ sur } \left]-\infty, \tfrac{1}{5}\right] \text{ et en-dessous sinon.}}$$

Nous pourrions également ajouter que les courbes sont sécantes au point de coordonnées $\left(\frac{1}{5}, f\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

3. Démontrez que $-2x^2 + 2x + 4 = -2(x+1)(x-2)$ puis déduisez-en la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ où $f(x) = x^2 - 6x + 1$ et $g(x) = 3x^2 - 8x - 3$.

Dans cette partie nous parlerons des courbes d'équations $y = f(x)$ plutôt que des courbes représentatives des fonctions ce qui est équivalent.

Proposition 1. La courbe d'équation $y = x$ est au-dessus de la courbe d'équation $y = x^2$ sur $[0;1]$ et au-dessous sinon.

Démonstration. $x^2 - x = x(x-1)$ d'où le tableau de signe et le résultat.

Proposition 2. La courbe d'équation $y = x$ est au-dessus de la courbe d'équation $y = x^3$ sur $]-\infty, -1] \cup [0;1]$ et au-dessous sinon.

Démonstration. $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ d'où le tableau de signe et le résultat.

Proposition 3. La courbe d'équation $y = x^2$ est au-dessus de la courbe d'équation $y = x^3$ sur $[0;1]$ et au-dessous sinon.

Démonstration. $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ d'où le tableau de signe et le résultat.

Remarques.

1. On remarque que sur $[0;1]$, $x \geqslant x^2 \geqslant x^3$ et sur $[1, +\infty[$, $x \leqslant x^2 \leqslant x^3$. On peut d'ailleurs conjecturer une généralisation de ce résultat à d'autres puissances ...

EXERCICE 4. Soient $f : x \mapsto x + 1$ et $g : x \mapsto x^2 - 2x - 9$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

1. Exprimez $g(x) - f(x)$ en fonction de x.
2. Démontrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 3x - 10 = (x+2)(x-5)$.
3. Étudiez le signe de $g(x) - f(x)$.
4. Donnez l'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x) - f(x)$.
5. Décrivez la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Conjecturer graphiquement la résolution d'équation et d'inéquations.

Exemples.

1. Résoudre l'équation $-2x + 3 = 1$.
2. Résoudre l'équation $x^2 = 4$.
3. Résoudre l'équation $x^3 = 1$.

Résoudre une équation (problème du domaine de l'algèbre) peut être interpréter comme la recherche d'antécédents par une fonction (problème du domaine de l'analyse). Avec l'informatique il est très rapide et facile d'obtenir la courbe représentative d'une fonction et donc de faire une lecture graphique. Cependant ce n'est pas une démonstration, nous ne pouvons que conjecturer.

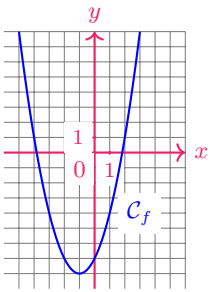
Exemples.

1.

Pour conjecturer les solutions de l'équation $x^2 + 2x - 7 = 3$ nous introduisons la fonction

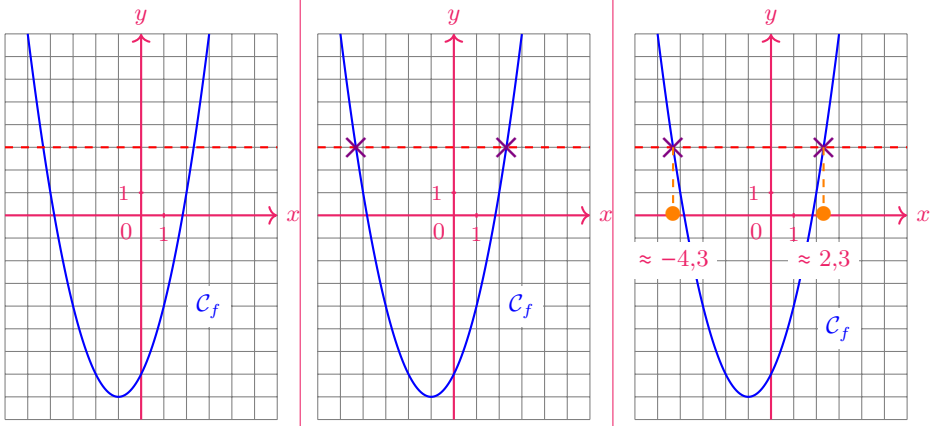
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x - 7 \end{array} \right.$$

puis traçons sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ avec un logiciel :



Résoudre l'équation équivaut donc à rechercher les antécédents de 3 par la fonction f.
Les solutions de l'équation $f(x) = 3$ sont les abscisses des points de la courbe d'ordonnée 3.
Concrètement pour les trouver il faut suivre les étapes suivantes.

1	2	3
Dessinez l'ordonnée 3.	Identifiez les points d'intersections.	Lire les abscisses correspondantes.



Conclusion :

l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 + 2x - 7 = 3$ est $\{-4{,}3\ ;\ 2{,}3\}$.

Remarques.

1. Inconvénients de la méthode :
   — comme pour toute lecture graphique les résultats sont approximatifs (insuffisant en mathématique)
   — il s'agit d'une partie de la courbe et nous ne savons pas ce qu'il en est pour le reste de la courbe.

EXERCICE 5. Déterminez graphiquement les solutions des équations suivantes :

a) $0{,}5x^2 - 0{,}5x - 10 = -9$.

b) $-\frac{1}{4}(x^2 + 7x + 6) = -3$.

EXERCICE 6.

Résolvez graphiquement ou algébriquement (selon ce qui est le plus pertinent) les équations suivantes.

a) (E_1) : $-\frac{1}{3}x + 3 = 1$.

b) (E_2) : $x^2 = 4$.

c) (E_3) : $x^2 = 6$.

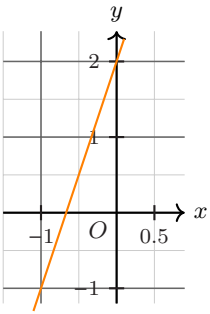
d) (E_4) : $3x^2 = 48$.

e) (E_5) : $(x + 1)(x - 2) = -2$.

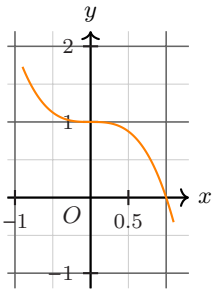
f) (E_6) : $5x^3 + x = 13$.

EXERCICE 7. Dans chaque cas, on a représenté dans un repère orthonormé une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

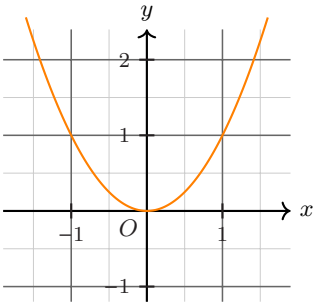
a)



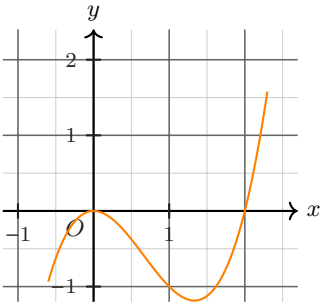
b)



c)

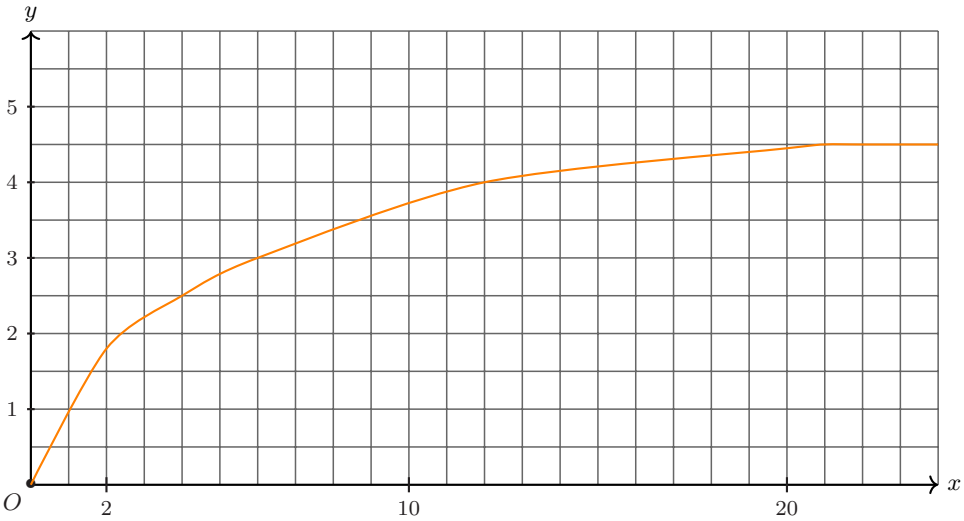


d)



1. Dans chaque cas précisez graphiquement le solutions des équations $f(x) = -0{,}5$; $f(x) = 0$; $f(x) = 1$; $f(x) = 2$.
2. Dans chaque cas déterminez, suivant les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ où $k \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 8. On considère la hauteur H, en mètre, d'un type d'arbre en fonction de son âge t en mois.

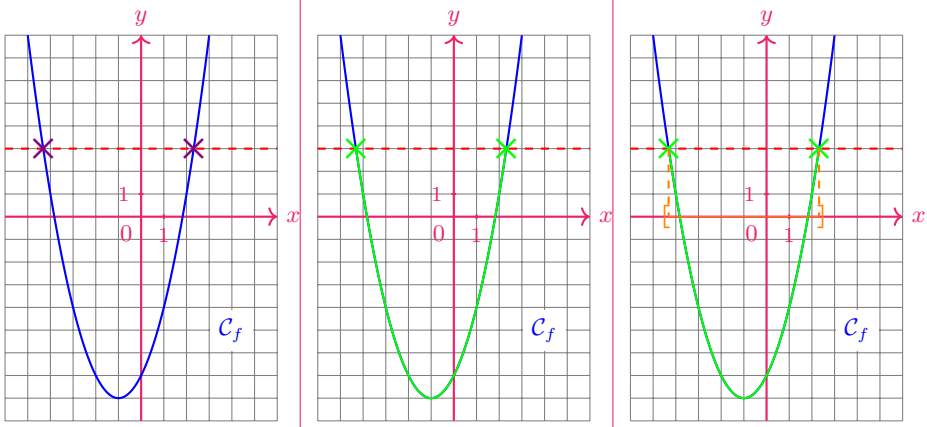


1. Déterminez et interprétez $H(1)$.
2. Ces arbres sont commercialisables dès qu'ils mesurent au moins 2 m : traduisez cela par une inéquation et résolvez-la.
3. À partir de quelle année ces arbres atteignent-ils leur hauteur maximale ?
4. Dès qu'ils atteignent 3,5 m, Jean taille ses arbres à une hauteur de 3 m. les arbres repoussent au même rythme : quelle sera la fréquence des coupes après la première ?

Exemples.

1. Pour conjecturer les solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 7 \leq 3$ nous introduisons encore la fonction $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 + 2x - 7 \end{array}$ puis traçons sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ avec un logiciel.
   Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq 3$ sont les abscisses des points de la courbe d'ordonnée plus petite ou égale à 3.
   Les étapes de la recherche sont les suivantes :

1	2	3
Dessinez l'ordonnée 3.	Identifiez les points de la courbe dont l'ordonnée est plus petite que 3.	Lire les abscisses correspondantes.

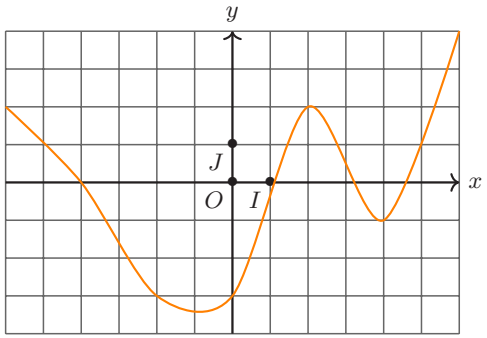


Enfin donnez les solutions sous forme d'ensemble :

l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 7 \leq 3$ est $[-4{,}3\ ;\ 2{,}3]$.

Remarquons enfin que si l'inégalité avait été stricte ($x^2 + 2x - 7 < 3$) l'ensemble des solutions eut été ouvert $(]-4{,}3\ ;\ 2{,}3[)$.

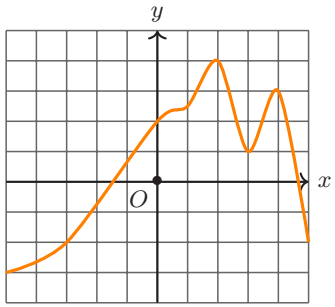
EXERCICE 9. On a dessiné ci-dessous la courbe représentative de la fonction f.



Résolvez les inéquations :

a) $f(x) \leqslant -3$.
b) $f(x) > 1$.
c) $f(x) < 0$.
d) $f(x) \leqslant -1$.
e) $f(x) \leqslant -4$.
f) $f(x) > 2$.

EXERCICE 10. Voici la courbe représentative d'une fonction h définie sur $[-5; 5]$.



Estimer les solutions des inéquations.

a) $h(x) \geqslant 0$
b) $h(x) < -4$
c) $h(x) < -2$
d) $h(x) > 3$

Exemples.

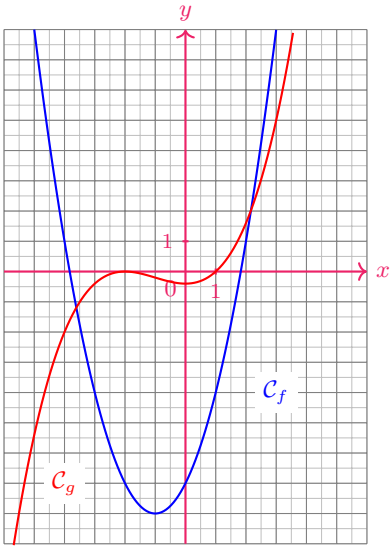
1.

Pour conjecturer les solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 7 \leq 0{,}1(x+2)^3 - 0.3(x+2)^2$ nous introduisons encore les fonctions

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x - 7 \end{array} \quad \text{et}$$

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0{,}1(x+2)^3 - 0.3(x+2)^2 \end{array}$$

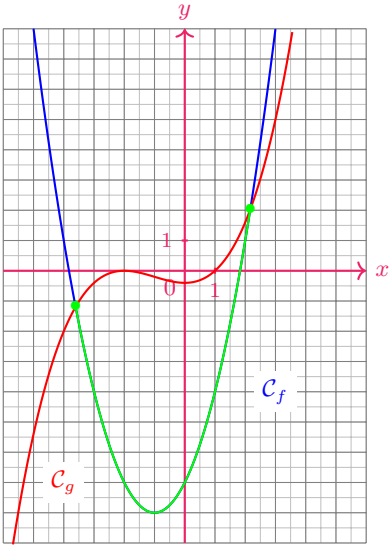
puis traçons leurs courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ avec un logiciel.

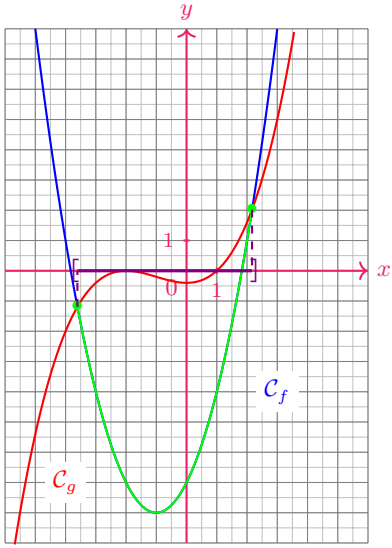


Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ situés en dessous de ceux de la courbe $\mathcal{C}_g$.

Les étapes de la recherche sont les suivantes :

1	2
Identifiez les points de $\mathcal{C}_f$ situés en dessous de ceux de $\mathcal{C}_g$.	Lire les abscisses correspondantes.

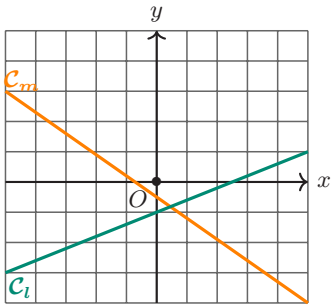




Enfin donnez les solutions sous forme d'ensemble :

l'ensemble des solutions de l'inéquation
$x^2 + 2x - 7 \leq 0{,}1(x+2)^3 - 0.3(x+2)^2$ est $[-3{,}6\ ;\ 2{,}2]$.

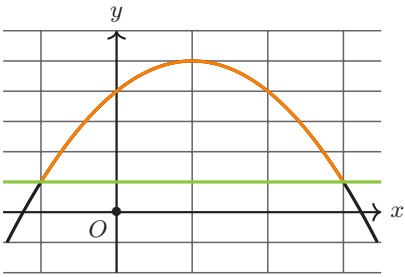
EXERCICE 11. Voici les courbes représentatives sur $[-5; 5]$ de deux fonctions affines l et m.



Estimer les solutions des (in)équations ci-dessous.

a) $l(x) = -1$ b) $m(x) > 0$ c) $l(x) = m(x)$ d) $l(x) < m(x)$

EXERCICE 12. Ci-dessous est représentée la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 4$.



1. Décrire, en notation mathématique, l'ensemble des abscisses des points orange de la courbe.
2. De quelle inéquation cet ensemble semble-t-il être la solution ?