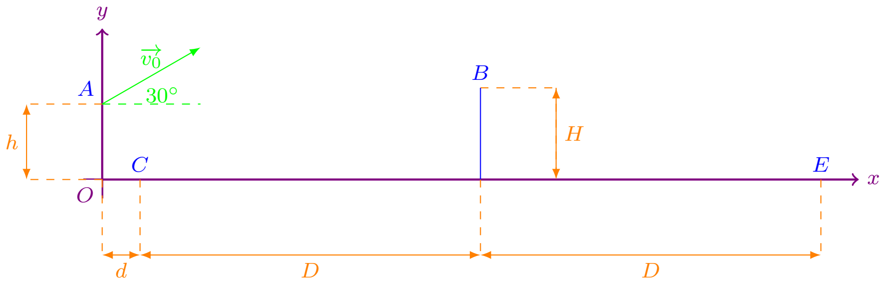
Introduction aux fonctions.

I Problème de science physique.

Exercice 1 pour s'entraîner.

Un joueur de volley-ball s'entraîne au service.
On a représenté la situation dans le repère d'origine O ci-dessous.



Le terrain a une longueur $CE = 2 \times D = 18$ m. La hauteur H du filet est égale à 2,43 m. Le joueur, représenté le segment $[OA]$, est situé à une distance $d = 1$ m de la ligne de fond (représentée par le point C). Le ballon part du point A situé sur l'axe des ordonnées.

On a modélisé la trajectoire du ballon après avoir mesuré la vitesse initiale du ballon et l'angle initial de sa trajectoire. La fonction f qui donne la hauteur $y = f(x)$ du ballon en fonction de son abscisse x est définie par :

$$f(x) = -0{,}05x^2 + 0{,}6x + 2.$$

1. Quelles sont les valeurs que peut prendre x qui sont cohérentes avec cet exercice ?
2. Complétez puis entrez dans votre Texas Instruments le programme de calcul suivant qui calcul $f(x)$ lorsqu'une valeur pour x a été choisie.

```
entrer x
si x ≥ 0 alors
    F prend la valeur ...
    afficher F
sinon
    afficher "erreur"
fin
```

3. Calculez la hauteur $h = OA$ du ballon au départ de sa trajectoire.
4. Prouver que le ballon passe au dessus du filet.
5. Pour qu'un service soit valable, il faut que le ballon retombe au sol dans la partie adverse du terrain.
   Ce service est-il valable ? *Toute trace de recherche sera prise en compte.*

II Problème économique.

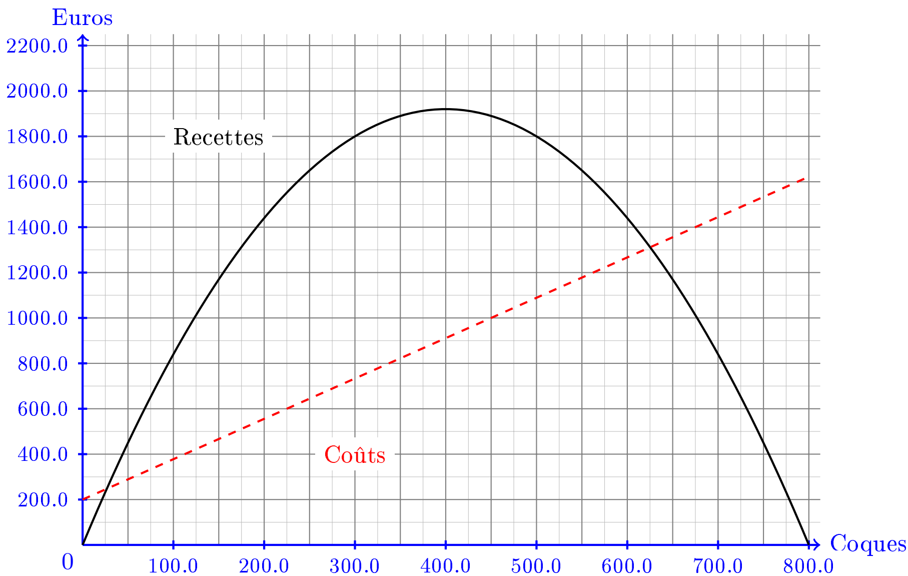
Exercice 2

Un entrepreneur lance sur le marché de nouvelles coques haut de gamme pour les téléphones mobiles.

Sur le graphique donné ci-dessous sont tracées les courbes représentant les recettes (en trait plein) et les coûts (en pointillés), en fonction du nombre de coques fabriquées exprimé en centaines d'unités.

Les ateliers permettent la fabrication de 0 à 800 coques.

Les recettes et les coûts sont exprimés euros.



Les réponses aux questions suivantes sont à justifier par lecture graphique avec, éventuellement, des tracés sur le graphique.

1. Étude du coût.
   (a) Quel est le coût de production de 125 coques ?
   (b) Pour quelle quantité de coques fabriquées le coût est-il de 1 000 euros ?
2. Étude de la recette.
   (a) Quelle est la recette occasionnée par la vente de 500 coques ?
   (b) Pour quel nombre de coques fabriquées la recette est-elle de 1 300 euros ? de 2 000 euros ?
3. Étude du bénéfice.

(a) Le bénéfice est la différence entre la recette et le coût.
Quel est le bénéfice pour une production de 450 coques ?

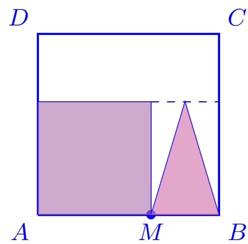
(b) Lorsque le bénéfice est positif on dit que l'entreprise est bénéficiaire.
Dans quels cas l'entreprise est-elle bénéficiaire ?

III Problème de géométrie.

Exercice 3

Le carré $ABCD$ a un côté de longueur 8 cm. M est un point (mobile) du segment $[AB]$. On dessine comme ci-contre dans le carré $ABCD$:

— un carré de côté $[AM]$.
— un triangle isocèle de base $[MB]$ et dont la hauteur a même mesure que le côté $[AM]$ du carré.



On s'intéresse aux aires du carré et du triangle.
Est-il possible que l'aire du triangle soit égale à l'aire du carré ?

IV Des fonctions.

Définition.

Deux quantités peuvent varier tout en étant liées. Ce lien peut s'exprimer par un tableau de données, une formule ou un graphique (courbe ou nuage de points). Les liens entre quantités peuvent prendre différents noms : équations, graphes, suites, fonctions, ... Nous nous intéresserons tout spécialement aux fonctions.

Définition 1

Soit $\mathscr{D}$ un ensemble de nombres. On définit une *fonction f sur $\mathscr{D}$* en associant à chaque nombre x appartenant à $\mathscr{D}$ un seul nombre y, noté $f(x)$.
Nous dirons que f est une fonction de la *variable* x.
La *courbe représentative de f*, que nous noterons souvent $\mathscr{C}_f$ est l'objet géométrique formé de tous les points de coordonnées $(x; f(x))$ lorsque x prend toutes les valeurs possibles dans D.

Exemples issus des trois problèmes :

1. Le problème de science physique.
   $\mathscr{D} = [0; +\infty[$. À chaque distance x parcourue par la balle on associe sa hauteur $y = f(x)$.
   f, la hauteur de la balle, est fonction de la distance x parcourue.
   $\mathscr{C}_f$ est appelée, depuis l'antiquité, une *parabole*.
2. Le problème économique.
   L'ensemble $\mathscr{D}$ des nombres de coques de téléphones est $\mathscr{D} = \{0; 1; ; 2 \ldots ; 799; 800\}$.
   À chaque nombre, x, de coques de téléphone nous associons (l'unique) recette qu'on peut noter $R(x)$.
   Nous dirons que la recette R est une fonction du nombre x de coques vendues.
3. Le problème géométrique.
   La variable peut-être AM ou MB. Dans les deux cas les valeurs prises par ces variables sont comprises entre 0 et 8 : $\mathscr{D} = [0; 8]$.
   Nous pouvons étudier deux fonctions : $\mathcal{A}_1$ l'aire du carré et $\mathcal{A}_2$ l'aire du triangle en fonction de la distance AM ou MB.

Vocabulaire et notations.

D est *l'ensemble* (ou *domaine*) *de définition* de f. D est l'ensemble des nombres auxquels un nombre est associé par f. On dit que f est définie sur D.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y \end{array} \right.$$

Cette présentation se lit : « la fonction f, définie sur D, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et qui à x associe y ».

x est *un antécédent* de y par f.

y est *l'image* de x par f. On le note $f(x)$ et on lit « f de x ».

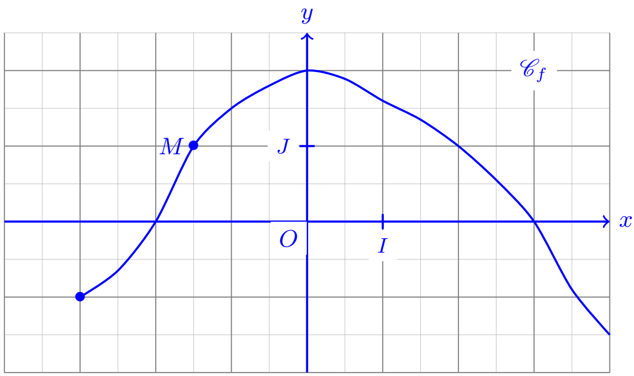
Remarques.

1. La première ligne (D et $\mathbb{R}$) est celle des ensembles, la seconde (x et y) celle des variables.
2. La première colonne (D et x) correspond à l'axe des abscisses, la seconde ($\mathbb{R}$ et $y = f(x)$) à celui des ordonnées.
3. Le préfixe « anté- » signifie avant (latin).
4. « un » antécédent car il peut y en avoir plusieurs.

5. « l' »image car (par construction) il ne peut y en avoir qu'une.

Exercice 4

Une fonction f est représentée ci-dessous.



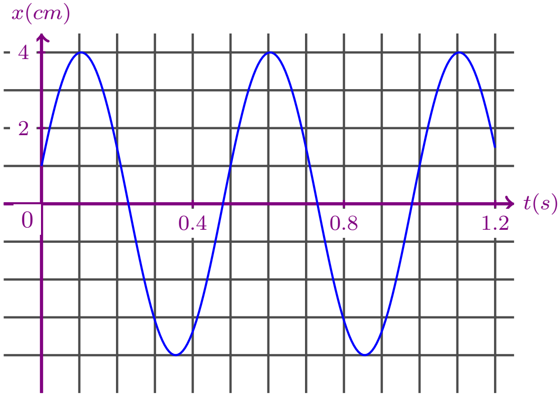
Répondez aux questions suivantes sans justification.

1. Donnez l'ensemble de définition de f.
2. Quel est l'image de 2 par f.
3. Quel est l'ensemble des antécédents de 0 par f ?
4. Quel est l'ensemble des antécédents de -2 par f ?
5. Quel est l'ensemble des antécédents de 2 par f ?
6. Quel est l'ensemble des antécédents de 2,5 par f ?
7. Quel est l'abscisse de M ?
8. Quel est l'ordonnée de N ?

V Exercices.

Exercice 5 pour s'entraîner.

Pour construire un pendule pesant, on accroche à l'extrémité d'un fil de longueur L une masse marquée m. On écarte la masse de sa position verticale (appelée position d'équilibre), puis on la lâche : elle se met à osciller et à l'aide d'un capteur approprié, on enregistre le signal suivant en salle de travaux pratiques :



1. Quelle est la forme mathématique de cette courbe ?
2. Ce signal est dit périodique : donner la signification de ce terme.
3. Déterminer la valeur de la période T.
4. En déduire la valeur de la fréquence f.
5. La période d'un pendule pesant est calculable à l'aide de la formule suivante :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

   Avec :
   L : longueur du pendule,
   g : intensité de la pesanteur au lieu de l'expérience.

   (a) Si la longueur du pendule augmente, dites, en utilisant la calculatrice, comment évoluera la période T du pendule.
   (b) Si une même expérience est réalisée sur la Lune et sur la Terre, en quel lieu la période sera la plus petite ?
   Données :
   $g_{\text{ Terre}} = 9{,}8$ N/kg ; $g_{\text{ Lune}} = 1{,}6$ N/kg.

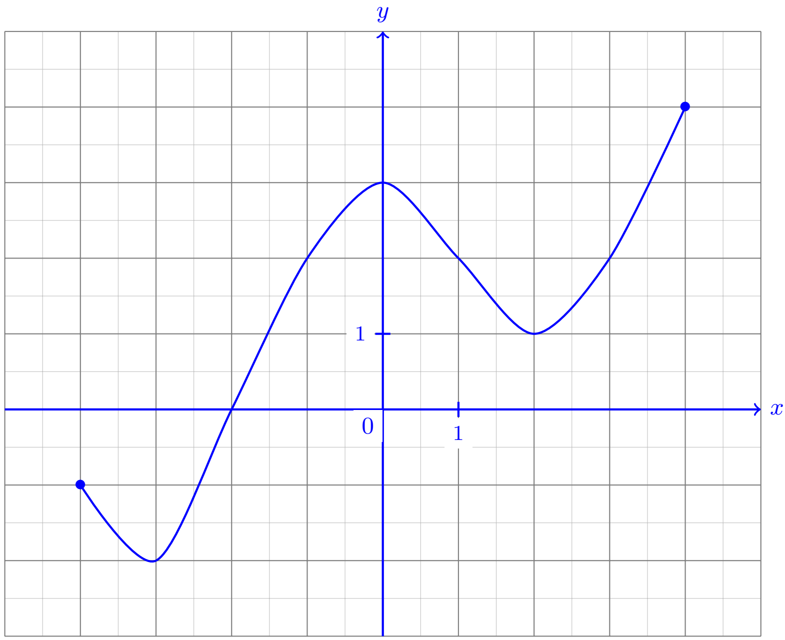
Exercice 6

Exercice 24 page 86 du manuel Sésamath : Reconnaître la courbe représentative d'une fonction.

Exercice 7 pour s'entraîner.

Graphique de l'exercice 53 page 90 du Sésamath : ensemble de définition, image et antécédents.

Exercice 8



Exercice 9

Soient $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x}$.

1. Donnez l'ensemble de définition de f.
2. Donnez l'ensemble de définition de g.
3. Déduisez des deux questions précédentes l'ensemble de définition d la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x} + \frac{1}{x}$.