Intervalles.

Un *intervalle* est un sous-ensemble (une partie) "sans trous" de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

I Intervalles bornés.

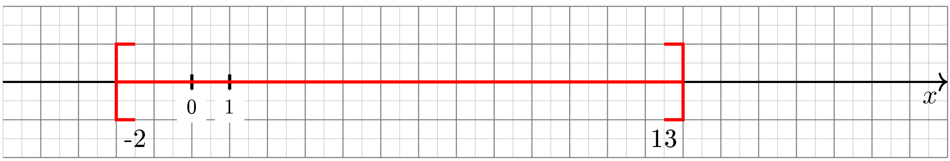
Les intervalles bornés sont les ensembles qui contiennent tous les réels qui sont compris entre deux *bornes* (limites).

Exemple.

L'intervalle $[-2\ \ 13]$ (lisez « fermé en -2 et fermé en 13 ») désigne l'ensemble des nombres réels x compris entre -2 et 13. Ce sont donc tous les nombres x qui vérifient

$$-2 \leq x \leq 13$$

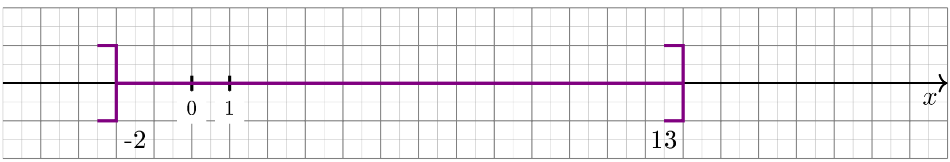
L'ensemble des nombres réels est représenté par une droite et l'intervalle $[-2\ ;\ 13]$ est alors représenté par un segment.



Il arrive souvent qu'en cherchant à optimiser la taille des intervalles il faille exclure les valeurs aux bornes. Ainsi pour désigner l'ensemble de tous les nombres compris entre -2 et 13 mais pas 2 nous noterons : $]-2\ ;\ 13]$ (lisez « ouvert en -2 et fermé en 13 »).

Ce qui correspond à tous le nombres x qui vérifient l'encadrement

$$-2 < x \leq 13$$



Remarques.

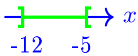
1. Pour dire qu'un nombre a est compris entre 3 et 4 nous écrirons : $a \in [3,4]$ et nous dirons que x *appartient* à l'intervalle $[3;4]$.

2. Les bornes d'un intervalle sont toujours écrites dans l'ordre croissant.
3. L'*ensemble vide*, $\emptyset$, qui ne contient aucun élément est considéré comme un intervalle.

Exercice 1

Le tableau suivant comporte quatre façons, et donc quatre points de vus, pour parler d'une même notion.

Recopiez-le, puis complétez-le en prenant pour modèle la deuxième ligne.

Notation	Représentation	Inéquations (encadrement)	Description
$[-2; 13]$		$-2 \leq x \leq 13$	Intervalle fermé en -2 et en 13.
$[4\ ;\ 8[$	...	...	...
		...	...
...	...	$\pi \leq x < 8$	...
...	...	...	Intervalle ouvert en -6 et fermé en 2.

II Intervalles non bornés.

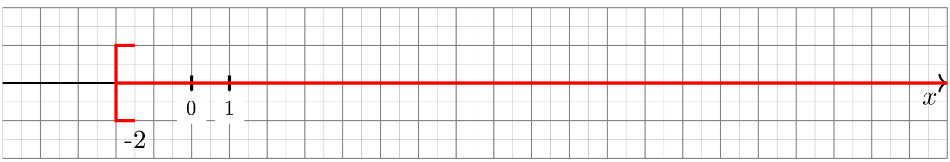
Les intervalles non bornés sont les intervalles qui contiennent tous les nombres plus grands ou plus petits qu'un nombre fixé.

Exemple.

L'intervalle $[-2 \quad +\infty[$ (lisez « fermé en -2 , plus l'infini ») désigne l'ensemble des nombres réels x supérieurs (ou égaux) à -2. Ce sont donc tous les nombres x qui vérifient

$$-2 \leq x$$

L'intervalle $[-2\ ;\ +\infty[$ est alors représenté par une demi-droite.



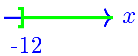
Remarques.

1. Le symbole ∞ désigne l'infini et n'est pas un nombre réel. C'est pourquoi le crochet est toujours ouvert du côté de ce symbole.

Exercice 2

Le tableau suivant comporte quatre façons, et donc quatre points de vus, différents pour parler d'une même notion.

Recopiez-le, puis complétez-le en prenant pour modèle la deuxième ligne.

Notation	Représentation	Inéquations (encadrement)	Description
$[-2,+\infty[$		$-2 \leq x$	Intervalle fermé en -2, plus l'infini.
$]-\infty;\ 8[$	...	...	...
		...	...
...	...	$x < \pi$	...
...	...	...	Intervalle moins l'infini, ouvert en -6.

III Réunion et intersection.

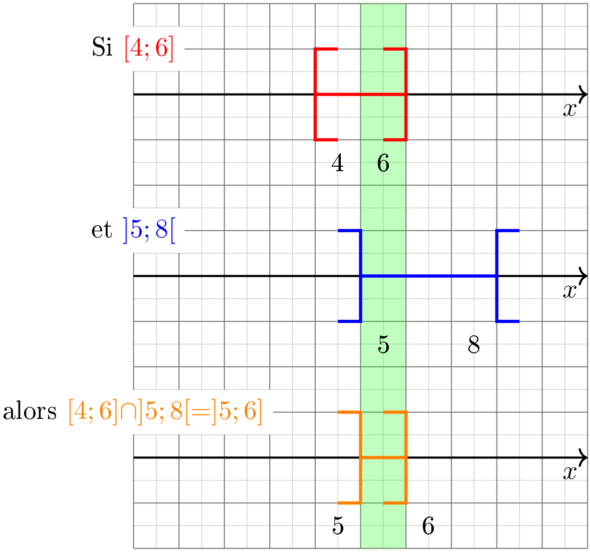
Intersection.

Définition 1

L'*intersection* de deux ensembles A et B, qu'on note $A \cap B$, est l'ensemble de tous les éléments commun à l'ensemble A et l'ensemble B.

Ainsi 5,5 appartient à l'intersection des intervalles [4,6] et]5,8[puisque 5,5 appartient à chacun d'entre eux.

Pour déterminer l'intersection tout entière de $[4; 6]$ et $]5; 8[$ nous raisonnerons de façon géométrique comme ci-dessous :



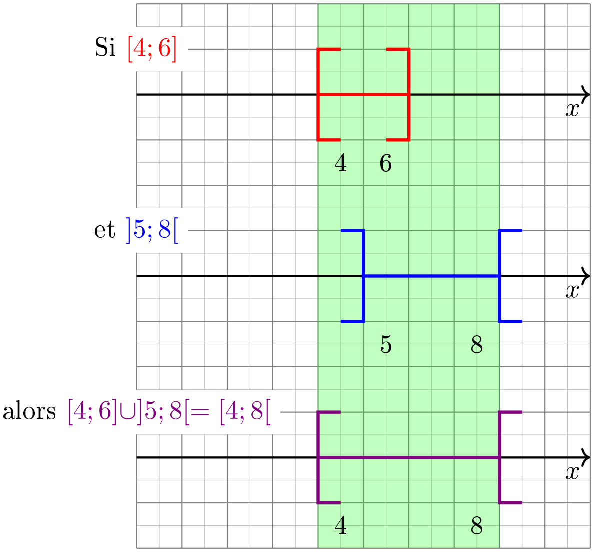
Réunion

Définition 2

La *réunion* de deux ensembles A et B, qu'on note $A \cup B$, est l'ensemble de tous les éléments de l'ensemble A et l'ensemble B.

Ainsi 5,5 et 4,5 et 7 appartiennent à la réunion des intervalles [4,6] et]5,8[puisqu'ils appartiennent soit à l'un, soit à l'autre, soit aux deux intervalles.

Pour déterminer la réunion tout entière de $[4;6]$ et $]5;8[$ nous raisonnerons de façon géométrique comme ci-dessous :



IV Exercice.

Exercice 3

Simplifiez les écritures suivantes en justifiant par un schéma.

1. $[-3;4[\cup]-1;5[$
2. $]-1;3]\cap]2;4]$
3. $]-3;2]\cup[3;5]$
4. $]-13;7]\cap[7;17]$
5. $]-12;-11[\cap[-11;-3[$
6. $]-\infty;5]\cap[3;7[$
7. $]-\infty;0]\cup[0;+\infty[$

Exercice 4

Le cardinal d'un ensemble fini A, qu'on note $\text{Card}(A)$ ou $\#(A)$, désigne le nombre d'éléments dans cet ensemble.

En vous aidant du diagramme de Venn ci-dessous déterminez une égalité liant $\text{Card}(A)$, $\text{Card}(B)$, $\text{Card}(A\cap B)$ et $\text{Card}(A\cup B)$.