

Intervalles.

I Intervalles.

L'ensemble de tous les nombres est noté $\mathbb{R}$. On le représente géométriquement par un axe appelé *droite numérique* :



Tout point de la droite est associé à un nombre et tout nombre est associé à un point de la droite. Le point A est associé au nombre -1 et le nombre 2 est associé au point B .

Les points O et I jouent un rôle particulier : ils indiquent la longueur 1 et le sens croissant sur la droite. On dit que (O,I) est un *repère* de la droite numérique. Le nombre associé à un point est appelé son *abscisse*.

Aux segments et demi-droites contenus dans la droite numérique on associe des ensembles de nombres appelés *intervalles*.

Soit M un point de la droite numérique d'abscisse x ce qui sera noté $M(x)$.



- Si $M \in [AB]$ alors $-1 \leq x \leq 2$ et nous écrirons $x \in [-1; 2]$. $[-1; 2]$ est appelé "l'intervalle fermé en -1 et fermé en 2 ".
- Si $M \in (AB]$ alors $x \leq 2$ et nous écrirons $x \in]-\infty, 2]$. $] - \infty, 2]$ est appelé "l'intervalle moins l'infini, fermé en 2 ".
- Si $M \in [AB]$ mais que M n'est pas A alors $-1 < x \leq 2$ et nous écrirons $x \in]-1; 2]$. $] - 1; 2]$ est appelé "l'intervalle ouvert en -1 et fermé en 2 ".

EXERCICE 1.

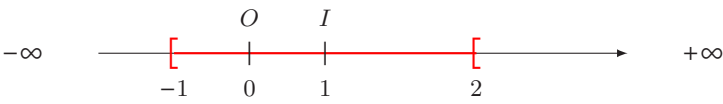
Tracez une droite numérique en plaçant les points suivants d'après leurs abscisses.

- | | | | |
|------------------|--------------------|------------------------|-------------------------|
| a) $O(0)$. | b) $I(1)$. | c) $A(-6)$. | d) $B(2)$. |
| e) $C(-1)$. | f) $D(1,5)$. | g) $E(-\frac{1}{2})$. | h) $F(2^2)$. |
| i) $G((-2)^2)$. | j) $J(\sqrt{9})$. | k) $K(\frac{1}{3})$. | l) $L(-5 + \sqrt{7})$. |

EXERCICE 2.

À chaque fois tracez la droite numérique en choisissant OI égale à 1 carreau puis dessinez l'intervalle proposé.

Exemple : $[-1,3[$ se représente par



- a) $I_1 = [-3; 0]$.
 d) $I_4 = [2, +\infty[$.
 g) $I_7 =]-4; 3[$.
- b) $I_2 = [2, 4]$.
 e) $I_5 =]-\infty, -1]$.
 h) $I_8 =]\sqrt{2}, +\infty[$.
- c) $I_3 =]-2; 1]$.
 f) $I_6 = \left[-\frac{1}{3}, 4\right[$.
 i) $I_9 =]-\infty, -4[$.

EXERCICE 3.

À chaque fois tracez la droite numérique en choisissant OI égale à 1 carreau puis dessinez l'intervalle proposé.

- a) "L'intervalle ouvert en -1 , fermé en 0 ".
 b) "L'intervalle fermé en -2 et en 3 ".
 c) "L'intervalle fermé en -4 , $+\infty$ ".
 d) "L'intervalle ouvert en 4 , $+\infty$ ".
 e) "L'intervalle $-\infty$, fermé en 3 ".
 f) "L'intervalle fermé en -4 et ouvert en 2 ".
 g) "L'intervalle fermé en -4 , $+\infty$ ".
 h) "L'intervalle $-\infty$, ouvert en 3 ".
 i) "L'intervalle fermé en -4 , ouvert en -1 ".

EXERCICE 4.

Dites à chaque fois si le nombre a appartient à l'intervalle I ou pas.

- a) $a = -1$ et $I =]-\infty, -2]$.
 c) $a = -3$ et $I = [-3, 245; +\infty[$.
 e) $a = 10^3$ et $]1000; +\infty[$.
 g) $a = -2$ et $I = [-4; -2[$.
- b) $a = \pi$ et $I = [3,05; 3,8]$.
 d) $a = \frac{1}{3}$ et $I = \left[0; \frac{1}{2}\right]$.
 f) $a = -\frac{1}{4}$ et $I = \left]-\frac{1}{3}, 0\right[$.

Exercice 4.

- a) $a = -1 \notin]-\infty, -2]$.
 d) $a = \frac{1}{3} \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.
 g) $a = -2 \notin [-4; -2[$.
- b) $a = \pi \in [3,05; 3,8]$.
 e) $a = 10^3 \notin]1000; +\infty[$.
- c) $a = -3 \in [-3, 245; +\infty[$.
 f) $a = -\frac{1}{4} \in \left]-\frac{1}{3}, 0\right[$.

EXERCICE 5.

Traduisez la ou les inégalités par une appartenance.

Exemple : $1 < x$ équivaut à $x \in]1, +\infty[$.

- a) $-6 > x$.
 e) $8 > x > \frac{1}{2}$.
- b) $12 \leq x \leq 100$.
 f) $4 \leq x$.
- c) $-3 < x \leq 11$.
 g) $x \geq 10^{-3}$.
- d) $-11 \leq x < -1$.
 h) $-\pi < x$.

Exercice 5.

- a) $-6 > x$ équivaut à $x \in]-\infty; -6[$.
 c) $-3 < x \leq 11$ équivaut à $x \in]-3; +\infty]$.
 e) $8 > x > \frac{1}{2}$ équivaut à $x \in \left]\frac{1}{2}; 8\right[$.
 g) $x \geq 10^{-3}$ équivaut à $x \in [10^{-3}; +\infty[$.
- b) $12 \leq x \leq 100$ équivaut à $x \in [12; 100]$.
 d) $-11 \leq x < -1$ équivaut à $x \in [-11; -1[$.
 f) $4 \leq x$ équivaut à $x \in [4; +\infty[$.
 h) $-\pi < x$ équivaut à $x \in]-\pi; +\infty[$.

EXERCICE 6.

Recopiez le tableau, puis complétez-le en prenant pour modèle la deuxième ligne.

Notation	Représentation	Inéquations (encadre- ment)	Description
$[-2; 13]$		$-2 \leq x \leq 13$	Intervalle fermé en -2 et en 13 .
$[4 ; 8[$	...	...	...
		...	...
...	...	$\pi \leq x < 8$	...
...	...	...	Intervalle ouvert en -6 et fermé en 2 .

EXERCICE 7.

Recopiez le tableau, puis complétez-le en prenant pour modèle la deuxième ligne.

Notation	Représentation	Inéquations (encadre- ment)	Description
$[-2, + \infty[$		$-2 \leq x$	Intervalle fermé en -2 , plus l'infini.
$] - \infty; 8[$	...	...	...
		...	...
...	...	$x < \pi$	...
...	...	...	Intervalle moins l'infini, ouvert en -6 .

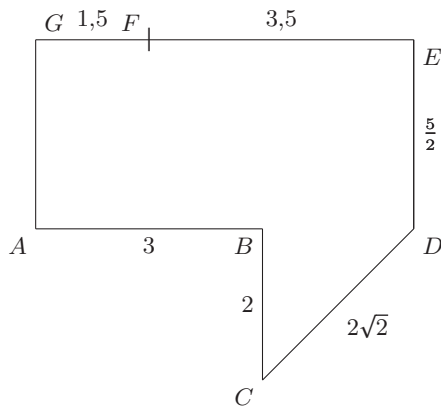
EXERCICE 8.

Complétez le tableau ci-dessous (les schémas ne doivent pas être à l'échelle).

Notation	Schéma	Inéquation(s)	Description
$] - 2 ; + \infty[$			
			
		$-3 < x \leq 4$	
			Intervalle ouvert en -5 et fermé en 7 .

EXERCICE 9.

On considère la figure ci-dessous.



Complétez les assertions par un intervalle.

- | | |
|---|---|
| a) Si $M \in [AB]$ alors $AM \in \dots$ | b) Si $M \in [BC]$ alors $BM \in \dots$ |
| c) Si $M \in [CD]$ alors $CM \in \dots$ | d) Si $M \in [DE]$ alors $EM \in \dots$ |
| e) Si $M \in [GF]$ alors $EM \in \dots$ | f) Si $M \in [EF]$ alors $AB + BC + CD + DE + EM \in \dots$ |

Exercice 9.

- | | |
|--|---|
| a) Si $M \in [AB]$ alors $AM \in [0; 3]$. | b) Si $M \in [BC]$ alors $BM \in [0; 2]$. |
| c) Si $M \in [CD]$ alors $CM \in [0; 2\sqrt{2}]$. | d) Si $M \in [DE]$ alors $EM \in [0; \frac{5}{2}]$. |
| e) Si $M \in [GF]$ alors $EM \in [3; 5]$. | f) Si $M \in [EF]$ alors $AB + BC + CD + DE + EM \in [7,5 + 2\sqrt{2}; 11 + 2\sqrt{2}]$. |

EXERCICE 10.

Donnez l'ensemble des solutions des inéquations.

- | | | | |
|-----------------|--------------------|---------------------------|----------------------|
| a) $x < -1$. | b) $3 \geq x$. | c) $\frac{1}{2} \leq x$. | d) $-\sqrt{2} < x$. |
| e) $10^3 > x$. | f) $x \leq 2,14$. | g) $x > \sqrt{\pi}$. | h) $x \geq -2,1$. |

Exercice 10.

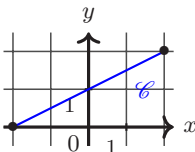
- | | | |
|------------------------------|-------------------------|-------------------------------|
| a) $] -\infty; -1[$. | b) $[3; +\infty[$. | c) $[\frac{1}{2}; +\infty[$. |
| d) $] -\sqrt{2}; +\infty[$. | e) $] -\infty; 10^3[$. | f) $] -\infty; 2,14]$. |
| g) $[\sqrt{\pi}; +\infty[$. | h) $[-2,1; +\infty[$. | |

EXERCICE 11.

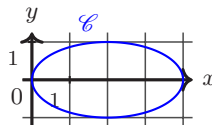
Valeurs possibles pour abscisses et ordonnées d'un point sur diverses courbes : segment, ellipse, cercle, carré, losange.

Par lecture graphique dites à quels intervalles appartiennent les abscisses et ordonnées d'un point $M(x,y)$ appartenant à la courbe $\mathcal{C}$.

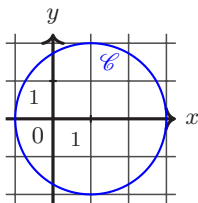
a)



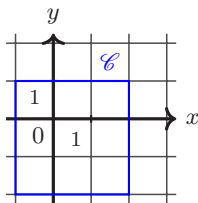
b)



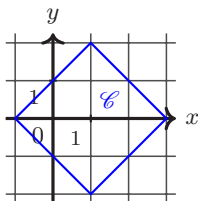
c)



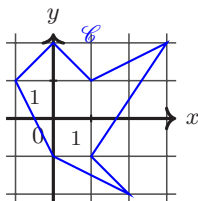
d)



e)



f)



Exercice 11.

- a) $x \in [-2; 2]$ et $y \in [0; 2]$.
 c) $x \in [-1; 3]$ et $y \in [-2; 2]$.
 e) $x \in [-1; 3]$ et $y \in [-2; 2]$.

- b) $x \in [0; 4]$ et $y \in [-1; 1]$.
 d) $x \in [-1; 2]$ et $y \in [-2; 1]$.
 f) $x \in [-1; 3]$ et $y \in [-2; 2]$.

EXERCICE 12.

Coloriez la zone du plan dont les points ont des coordonnées qui appartiennent à tel et tel intervalle.

Coloriez l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que

- a) $0 \leq x \leq 3$ et $0 \leq y \leq 2$.
 c) $x \in [-1, 1]$ et $y \in [-2, 1]$.
 e) $2x \in [4, 6]$ et $3y \in [-3, 9]$.
 b) $-2 \leq x \leq 3$ et $-1 \leq y \leq 2$.
 d) $x \in [-3, -2]$ et $y \in [-1, 0]$.
 f) $x + 5 \in [3, 7]$ et $2x - 6 \in [6, -1]$.

EXERCICE 13.

Une espèce de jeu de piste : le nombre cherché est plus grand que la moitié de ...

II Les règles de manipulation.

Théorème 1.

- (i) On ne modifie pas l'ensemble des solutions d'une inéquation en ajoutant ou en soustrayant le même nombre à chaque membre de celle-ci.
 (ii) On ne modifie pas l'ensemble des solutions d'une inéquation en multipliant ou en divisant par un même nombre strictement positif chaque membre de celle-ci.
 (iii) Pour ne pas modifier l'ensemble des solutions d'une inéquation en multipliant ou en divisant par un même nombre strictement négatif des deux côtés de l'inégalité il faut changer le sens de l'inégalité.

Remarques.

1. Ce sont les mêmes règles que pour les équations hormis le cas de la multiplication (ou division) par un nombre strictement négatif.
2. Nous pourrions donc résoudre les inéquations du premier degré comme nous le faisons pour les équations du premier degré en isolant l'inconnue.

Exemples.

1.

$$x - 7 \geq 12$$

équivalent successivement à

$$x - 7 + 7 \leq 12 + 7$$

$$x \leq 19$$

$$x \in]-\infty; 19]$$

2. $3x \leq 12$.

3. $-4x \geq 32$.

III Somme d'inégalités.

Faire comparaisons avec l'égalité.

Chercher un lien dans une autre partie du programme car je ne vois pas l'intérêt.

Il est possible d'ajouter des égalités membre à membre. On peut également ajouter des inégalités si elles sont dans le même sens.

Proposition 1.

Soient a , b , u et v des réels.

Si $\begin{cases} a \leq b \\ u \leq v \end{cases}$, alors $a + u \leq b + v$.

Démonstration.

La somme de deux nombres positifs est un nombre positif donc $(b - a) + (v - u) \geq 0$.

D'où : $b + v \geq a + u$.

Remarques.

1. Il est possible de donner des variantes : si $\begin{cases} a < b \\ u \leq v \end{cases}$, alors $a + u < b + v$.

Ou encore : Si $\begin{cases} a < b \\ u < v \end{cases}$, alors $a + u < b + v$.

IV Exercices.

EXERCICE 14.

Résolvez les inéquations.

a) $-3x + 7 < x + 2$

c) $-x > 9$

e) $2(3 - x) \geq 8$

g) $3x - (4 + 3x) > 2$

i) $(x - 1)(3 - x) > 7.$

b) $-5x - 2 \leq 0$

d) $-x + 5 \leq 7 - 6x$

f) $2x - 7 < (3x - 4) - x$

h) $(2x - 1)(2x + 3) \leq (2x + 4)^2$

Exercice 14.

a)

$$-3x + 7 < x + 2 \Leftrightarrow -3x + 7 - x < x + 2 - x$$

$$\Leftrightarrow -4x + 7 < 2$$

$$\Leftrightarrow -4x + 7 - 7 < 2 - 7$$

$$\Leftrightarrow -4x < -5$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4x}{-4} > \frac{-5}{-4}$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{5}{4}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} =]\frac{5}{4}; +\infty[.$

b)

$$-5x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -5x - 2 + 2 \leq 0 + 2$$

$$\Leftrightarrow -5x \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5x}{-5} \geq \frac{2}{-5}$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{5}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} = [-\frac{2}{5}; +\infty[.$

c)

$$-x > 9 \Leftrightarrow \frac{-x}{-1} < \frac{9}{-1}$$

$$\Leftrightarrow x < -9$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} =]-\infty; -9[.$

d) $\mathcal{S} =]-\infty, \frac{2}{5}]$.

e) $\mathcal{S} =]-\infty, -1]$.

f)

$$2x - 7 < (3x - 4) - x \Leftrightarrow 2x - 7 < 3x - 4 - x$$

$$\Leftrightarrow 2x - 7 < 2x - 4$$

$$\Leftrightarrow 2x - 7 - 2x < 2x - 4 - 2x$$

$$\Leftrightarrow -7 < -4$$

Cette dernière égalité est toujours vraie, quelque soit la valeur choisie pour x . Donc :

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

g)

$$\begin{aligned}3x - (4 + 3x) > 2 &\Leftrightarrow 3x - 4 - 3x > 2 \\&\Leftrightarrow -4 > 2\end{aligned}$$

Cette dernière égalité est toujours fausse, quelque soit la valeur choisie pour x . Donc :
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} = \emptyset$.

h)

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow 3x - 3 \leq 16x + 16 \\&\Leftrightarrow -19 \leq 13x\end{aligned}$$

i) $\mathcal{S} = \left[-\frac{19}{13}; +\infty[.$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 10 > 0$$

$$\mathcal{S} = ?.$$

EXERCICE 15. E

Trouvez tous les nombres x qui vérifient les deux inéquations (système de deux équations à une inconnue) dans chaque cas :

a) $\begin{cases} x + 7 \leq 12 \\ x - 5 \geq -17 \end{cases}$	b) $\begin{cases} 2x - 8 \leq 5x + 13 \\ 4x - 23 \leq 10 + x \end{cases}$
c) $\begin{cases} 2x - 8 \geq 5x + 13 \\ 4x - 23 \geq 10 + x \end{cases}$	d) $\begin{cases} 2x - 8 \leq 5x + 13 \\ 4x - 23 \geq 10 + x \end{cases}$

Exercice 15.

1. L'ensemble des solutions de $2x - 8 \leq 5x + 13$ est $\mathcal{S}_1 = [-7; +\infty[.$
L'ensemble des solutions de $4x - 23 \leq 10 + x$ est $\mathcal{S}_2 =]-\infty; 11].$
L'ensemble des solutions du système d'inéquation est $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = [-7; +\infty[\cap]-\infty; 11] = [-7; 11].$
2. L'ensemble des solutions de $2x - 8 \geq 5x + 13$ est $\mathcal{S}_1 =]-\infty; -7].$
L'ensemble des solutions de $4x - 23 \geq 10 + x$ est $\mathcal{S}_2 = [11; +\infty[.$
L'ensemble des solutions du système d'inéquation est $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 =]-\infty; -7] \cap [11; +\infty[= \emptyset.$
3. L'ensemble des solutions de $2x - 8 \leq 5x + 13$ est $\mathcal{S}_1 = [-7; +\infty[.$
L'ensemble des solutions de $4x - 23 \geq 10 + x$ est $\mathcal{S}_2 = [11; +\infty[.$
L'ensemble des solutions du système d'inéquation est $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = [-7; +\infty[\cap [11; +\infty[= [11; +\infty[.$

EXERCICE 16.

Trasnmath 2010 2ieme page 44 exo 63

1. (a) Résolvez l'équation $8x - 4 = 0$.
(b) Résolvez l'inéquation $8x - 4 \geq 0$.
2. Parfois on ne précise pas l'ensemble de définition d'une fonction g . Dans ce cas l'ensemble des définition est l'ensemble des nombres x pour lesquels $g(x)$ existe.
Déduisez de la question 1 les ensembles de définition des fonctions suivantes.

(a) $g : x \mapsto \frac{1}{8x - 4}.$

(b) $h : x \mapsto \sqrt{8x + 4}.$

Exercice 16.

1. (a) $x = \frac{1}{2}$.
(b) $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[.$
2. (a) $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
(b) $\mathcal{D}_h = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[.$

EXERCICE 17.

Trasnmath 2010 2ieme page 64 exo 67

Un particulier a des marchandises à faire transporter. Un premier transporteur lui demande 460 € au départ et 3,50 € par kilomètre. Un second transporteur lui demande 1000 € au départ et 2 euro par kilomètre.

Pour quelles distances à parcourir est-il plus avantageux de s'adresser au second transporteur ?

Exercice 17.

$$3,5x + 460 \geq 2x + 1000 \Leftrightarrow x \geq \frac{1000-460}{1,5} \Leftrightarrow x \geq 360$$

EXERCICE 18.

Trasnmath 2010 2ieme page 64 exo 68

Une société veut imprimer des livres. La location de la machine revient à 750 € par jour et les frais de fabrication s'élèvent à 3,75 € par livre.

Combien faut-il imprimer de livre par jour pour que le prix de revient d'un livre soit inférieur ou égal à 6 €.

Exercice 18.

$$3,75x + 750 \leq 6x \Leftrightarrow \frac{750}{6-3,75} \leq x \Leftrightarrow \frac{1000}{3} \leq x.$$

EXERCICE 19.

On considère un nombre rationnel $\frac{p}{q}$, où p et q sont des nombres entiers, q étant non nul.

Ce nombre a pour valeur approchée par excès à 10^{-3} près 1,118.

On sait de plus que $q = 1789$.

Quelle(s) est (sont) la (les) valeur(s) possible(s) pour p ?

Exercice 19.

* Interprétons les conditions données par l'énoncé.

— Ce nombre a pour valeur approchée par excès à 1^{-3} près 1,118, donc :

$$1,117 \leq \frac{p}{q} \leq 1,118$$

— On sait de plus que $q = 1789$, donc :

$$1,117 \leq \frac{p}{1789} \leq 1,118$$

De cet encadrement on déduit :

$$1789 \times 1,117 \leq p \leq 1789 \times 1,118$$

$$1998,313 \leq p \leq 2000,102$$

Et puisque p est un entier :

$$1999 \leq p \leq 2000$$

* Réciproquement, si $p = 1999$ (respectivement $p = 2000$), alors $\frac{p}{1789} \approx 1,11738$ (resp. $\frac{p}{1789} \approx 1,11794$). Autrement dit les deux valeurs possibles pour p sont 1999 et 2000.

EXERCICE 20.

Deux entreprises de transport proposent les tarifs suivants :

- 110 € au départ plus 1,26 € du kilomètre ;
- 120 € au départ plus 1,22 € du kilomètre.

Pour quels kilométrages le tarif du second transporteur est-il plus avantageux ?

Exercice 20.

Notons x le nombre kilomètres parcourus, $A(x)$ le tarif pour x kilomètres du premier transporteur, $B(x)$ le tarif pour x kilomètres du second transporteur.

Réolvons l'inéquation $A(x) \geq B(x)$ dans $[0; +\infty[$.

$$\begin{aligned}
 A(x) \geq B(x) &\Leftrightarrow 110 + 1,26x \geq 120 + 1,22x \\
 &\Leftrightarrow 110 + 1,26x - 1,22x \geq 120 + 1,22x - 1,22x \\
 &\Leftrightarrow 110 + (1,26 - 1,22)x \geq 120 \\
 &\Leftrightarrow 110 + 0,04x \geq 120 \\
 &\Leftrightarrow 110 + 0,04x - 110 \geq 120 - 110 \\
 &\Leftrightarrow 0,04x \geq 10 \\
 &\Leftrightarrow \frac{0,04x}{0,04} \geq \frac{10}{0,04} \\
 &\Leftrightarrow x \geq 250
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation dans $[0; +\infty[$ est $\mathcal{S} = [250; +\infty[$.

Le second transporteur est plus avantageux pour plus de 250 km.

EXERCICE 21.

Un libraire vend des crayons 2,4 € pièce. Sur ces articles ses frais s'élèvent à 0,6 € par crayon auxquels il faut ajouter une somme fixe de 34,2 €.

Calculez, en fonction de x , le bénéfice réalisé par la vente de x crayons. Combien doit-il vendre de crayons pour que le bénéfice soit compris entre 68,4 € et 102,6 € ?

Exercice 21.

Déterminons le bénéfice en fonction de x .

Le bénéfice réalisé pour la vente de $x \in \mathbb{N}$ crayons est :

$$\begin{aligned}
 B(x) &= 2,4x - 0,6x - 34,2 \\
 &= (2,4 - 0,6)x - 34,2
 \end{aligned}$$

$$B(x) = 1,8x - 34,2 \text{ pour tout } x \in \mathbb{N}.$$

Réolvons dans $\mathbb{R}$ le système $\begin{cases} 68,4 \leq B(x) \\ B(x) \leq 102,6 \end{cases}$.

$$\begin{aligned}
 68,4 \leq B(x) &\Leftrightarrow x \in [57; +\infty[\\
 B(x) \leq 102,6 &\Leftrightarrow x \in]-\infty; 76]
 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions du système est : $\mathcal{S} =]-\infty; 76] \cap [57; +\infty[= [57; 76]$.

Il devra vendre entre 57 et 76 crayons pour réaliser ses objectifs.

EXERCICE 22.

2ieme bordas fractales 1990 page 100 exercice 109

