

Fonctions.

I Définition.

1 Des liens.

Une fonction f indique des liens entre des nombres. Par exemple pour indiquer que f relie le nombre 2 au nombre 3 nous écrirons :

$$f(2) = 3.$$

Nous dirons alors que 2 est *un antécédent* de 3 par f .

Nous dirons aussi que 3 est *l'image* de 2 par f .

Définition 1

Soit \mathcal{D} un ensemble de nombres.

On définit une *fonction f sur \mathcal{D}* en associant à chaque nombre x appartenant à \mathcal{D} un seul nombre y , noté $f(x)$.

Nous dirons que f est une fonction de la *variable x* .

Nous dirons que \mathcal{D} est *l'ensemble de définition* de f .

Il existe une notation schématique qui regroupe toutes les informations de la définition.

\mathcal{D} est *l'ensemble* (ou *domaine*) *de définition* de f .
 \mathcal{D} est l'ensemble des nombres auxquels un nombre est associé par f . On dit que f est définie sur \mathcal{D} .

$$f : \begin{cases} D & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y \end{cases}$$

Cette présentation se lit :
 « la fonction f , définie sur \mathcal{D} , à valeurs dans \mathbb{R} , et qui à x associe y ».

x est *un antécédent* de y par f .

y est *l'image* de x par f . On le note $f(x)$ et on lit « f de x ».

Remarques.

1. La première ligne (D et \mathbb{R}) est celle des ensembles, la seconde (x et y) celle des variables.

- La première colonne (D et x) correspond à l'axe des abscisses, la seconde (\mathbb{R} et $y = f(x)$) à celui des ordonnées.
- Le préfixe « anté- » signifie avant (latin).
- « un » antécédent car il peut y en avoir plusieurs.
- « l' » image car (par construction) il ne peut y en avoir qu'une.

2 Représenter des liens par une formule de calcul ou un procédé implicite.

Très souvent les liens entre les nombres seront représentés par des calculs. Par exemple nous écrirons

$$f : x \mapsto 2x - 1,$$

et nous lirons « la fonction f qui à x associe $2x - 1$ », pour indiquer qu'à chaque nombre x choisi nous associerons le résultat du calcul $2x - 1$.

Ce lien que vous avez déjà rencontré au collège définit une fonction affine.

Remarques.

- Si pour les modélisations en sciences expérimentales (physique, chimie, biologie, géologie, économie,...) les fonctions constantes et linéaires correspondent à des modélisations spécifiques, pour l'étude mathématique, elles ne sont que des cas particuliers de fonctions affines.
- Pour la fonction racine carrée nous n'avons pas réellement une formule. Nous ne connaissons que les racines carrées des carrés parfaits (0, 1, 4, 9, 16, ...). L'utilisation du symbole $\sqrt{\quad}$ n'indique pas un procédé de calcul pour obtenir ne serait-ce qu'une valeur approchée de la valeur désirée. Nous verrons des algorithmes pour obtenir des valeurs approchées. Il s'agit, hormis pour les carrés parfaits, d'un procédé de définition implicite : la racine carrée est l'antécédent positif par la fonction carrée.

II Tableau de valeurs.

Il est possible de représenter les nombres reliés par une fonction en les plaçant en vis-à-vis dans un tableau.

Par exemple, en utilisant la fonction affine précédente, nous voyons :

$$f(-1) = 2 \times (-1) - 1 = -3.$$

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-1	1	3	5

III Représentation graphique.

Définition 2

Soient :

- \mathcal{D} un ensemble de nombres,
- $f : \begin{cases} \mathcal{D} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}$ une fonction.

La *courbe représentative de f* , que nous noterons souvent \mathcal{C}_f est l'objet géométrique formé de tous les points de coordonnées $(x; f(x))$ (dans un certain repère) lorsque x prend toutes les valeurs possibles dans \mathcal{D} .

Remarques.

1. La courbe représentative (pas le dessin mais l'ensemble des couples $(x; f(x))$) est le point de vue retenu pour la définition générale d'une fonction.
2. Comme $f(x)$ est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse x nous dirons aussi que \mathcal{C}_f est la *courbe d'équation $y = f(x)$* .

Exercice 1.

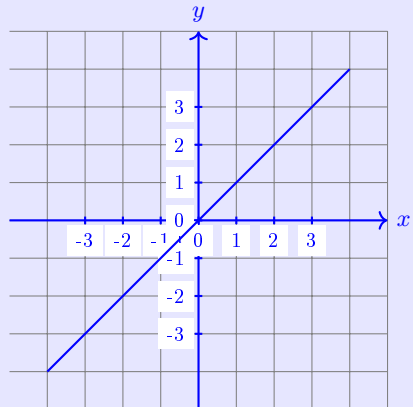
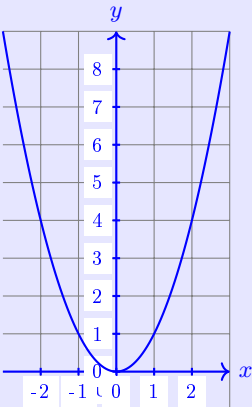
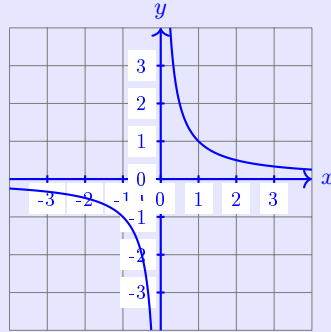
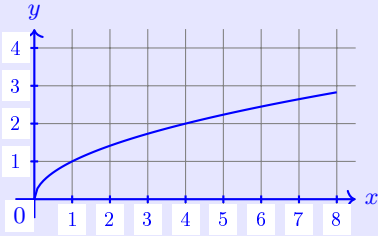
Associez, sans aucune justification, chaque fonction à sa courbe représentative.

$$f_1 : x \mapsto \frac{1}{x},$$

$$f_3 : x \mapsto \sqrt{x},$$

$$f_2 : x \mapsto x,$$

$$f_4 : x \mapsto x^2.$$



Exercice 2.

Exercices 88 page 232 du manuel Indice.

Exercice 3.

Exercices 89 page 232 du manuel Indice.

Exercice 4.

Exercice 27 page 54 du manuel lelivrescolaire.fr.

Exercice 5.

Exercice 31 page 55 du manuel lelivrescolaire.fr.

Exercice 6.

Exercice 35 page 56 du manuel lelivrescolaire.fr.

Exercice 7.

Exercice 41 page 57 du manuel lelivrescolaire.fr.

IV Conjecturer des résolutions d'équation grâce aux courbes représentatives.

1 Équation de la forme $f(x) = a$.

Résoudre une équation (problème du domaine de l'algèbre) peut être interpréter comme la recherche d'antécédents par une fonction (problème du domaine de l'analyse).

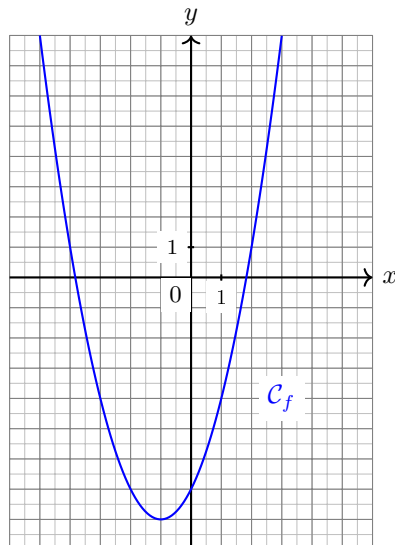
L'inconvénient de cette méthode : ce n'est pas une démonstration et nous ne pouvons que conjecturer.

L'avantage : avec l'informatique il est très rapide et facile d'obtenir la courbe représentative d'une fonction et donc de faire une lecture graphique.

Pour conjecturer les solutions de l'équation $x^2 + 2x - 7 = 3$ nous introduisons la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x - 7 \end{cases}$$

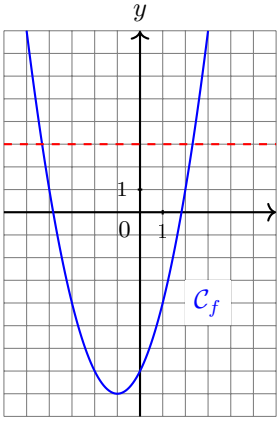
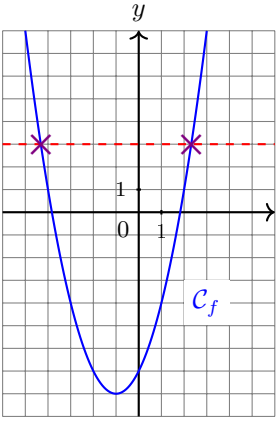
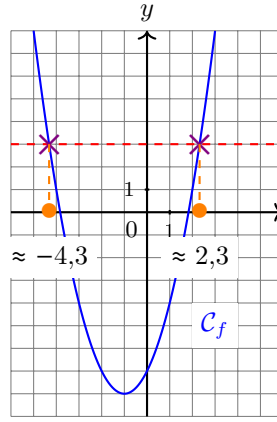
puis traçons sa courbe représentative \mathcal{C}_f avec un logiciel :



Résoudre l'équation équivaut donc à rechercher les antécédents de 3 par la fonction f .

Les solutions de l'équation $f(x) = 3$ sont les abscisses des points de la courbe d'ordonnée 3.

Concrètement pour les trouver il faut suivre les étapes suivantes.

1	2	3
<p>Dessinez l'ordonnée 3.</p> 	<p>Identifiez les points d'intersection.</p> 	<p>Lire les abscisses correspondantes.</p> 

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 + 2x - 7 = 3$ est $\{-4,3 ; 2,3\}$.

Remarques.

1. Inconvénients de la méthode :

- Comme pour toute lecture graphique les résultats sont approximatifs (insuffisant en mathématique)
- il s'agit d'une partie de la courbe et nous ne savons pas ce qu'il en est pour le reste de la courbe.

Exercice 8.

Déterminez graphiquement les solutions des équations suivantes :

1. $0,5x^2 - 0,5x - 10 = -9$.
2. $-\frac{1}{4}(x^2 + 7x + 6) = -3$.

Exercice 9.

Résolvez graphiquement puis algébriquement les équations suivantes.

1. $(E_1) : -\frac{1}{3}x + 3 = 1.$
2. $(E_2) : x^2 = 4.$
3. $(E_3) : x^2 = 6.$
4. $(E_4) : 3x^2 = 48.$
5. $(E_5) : (x + 1)(x - 2) = -2.$

Exercice 10.

Exercice 50 page 59 du manuel lelivrescolaire.fr.

Exercice 11.

Exercice 51 page 59 du manuel lelivrescolaire.fr.

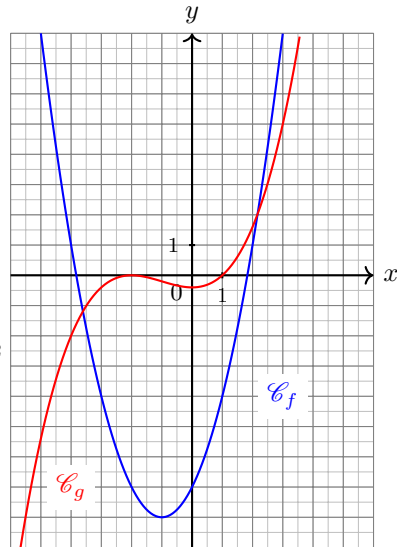
2 Équation : $f(x) = g(x).$

Pour conjecturer les solutions de l'équation $x^2 + 2x - 7 = 0,1(x + 2)^3 - 0,3(x + 2)^2$ nous introduisons encore les fonctions

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x - 7 \text{ et} \end{cases}$$

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0,1(x + 2)^3 - 0,3(x + 2)^2 \end{cases}$$

puis traçons leurs courbes représentatives \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g avec un logiciel.

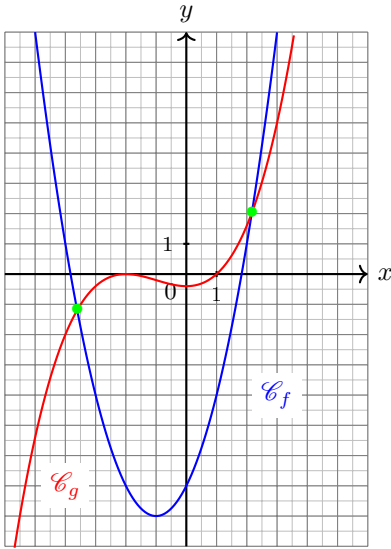


Les solutions de l'équation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

Les étapes de la recherche sont les suivantes :

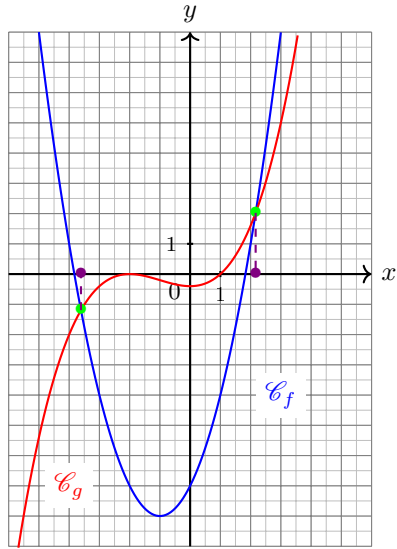
1

Identifiez les points d'intersection de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .



2

Lire les abscisses correspondantes.



Enfin donnez les solutions sous forme d'ensemble : l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 7 = 0, 1(x + 2)^3 - 0.3(x + 2)^2$ est $\{-3,6 ; 2,2\}$.

Exercice 12.

Exercice 52 page 60 du manuel lelivrescolaire.fr.

Exercice 13.

Résolvez graphiquement les équations proposées dans l'exercice 53 page 60 du manuel lelivrescolaire.fr. Il vous manque un outil pour la résolution algébrique de la question 3.

V Parité.

1 Définition algébrique.

Définition 3

Soient :

- . \mathcal{D}_f un ensemble de réels symétrique par rapport à 0, autrement dit si $x \in \mathcal{D}_f$, alors $-x \in \mathcal{D}_f$,
- . $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur \mathcal{D}_f .

Nous dirons que f est *paire* si et seulement si, quelque soit $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f(-x) = f(x).$$

Nous dirons que f est *impaire* si et seulement si, quelque soit $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f(-x) = -f(x).$$

2 Interprétation géométrique.

Proposition 1

Soient :

- . \mathcal{D}_f un ensemble de réels symétrique par rapport à 0,
- . $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur \mathcal{D}_f ,
- . \mathcal{D}_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (O, I, J) .

- (i) f est paire si et seulement si sa courbe représentative, \mathcal{C}_f , présente une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
- (ii) f est impaire si et seulement si sa courbe représentative, \mathcal{C}_f , présente une symétrie par rapport à l'origine du repère.

Exercice 14.

Exercice 15.

Exercice 42 page 57 du manuel lelivrescolaire.fr.

Exercice 16.

Exercice 46 page 57 du manuel lelivrescolaire.fr.

Exercice 17. Recherche.

Déterminez toutes les valeurs de a et b des réels pour lesquels la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est impaire.

Même question pour paire.

VI Des fonctions avec Python.

Il existe une instruction pour définir une fonction dans un programme en Python qu'il est ensuite loisible d'utiliser pour faire d'autres calculs dans le même programme.

Voici comment définir la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2x + 1$:

```
def f(x):
    y=x**2-2*x+1
    return(y)
```

Pour calculer l'image de 3 par f il suffit alors de taper dans Python (un shell ou un script) :

```
f(3)
```

Remarques.

1. Il n'y a pas d'ensemble de définition à préciser pour une fonction en Python. S'il y a des valeurs interdites un message d'erreur s'affichera.
2. Les fonctions en Python permettent de nombreux calculs intermédiaires pour le calcul du y . Il est notamment possible d'utiliser des boucles.
3. Les fonctions Python sont très utilisées car elles servent de sous-programme dans un long programme.