Fonctions.

I Définition.

Une fonction f indique des liens entre des nombres. Par exemple pour indiquer que f relie le nombre 2 au nombre 3 nous écrirons :

$$f(2) = 3.$$

Nous dirons alors que 2 est *un antécédent* de 3 par f.
Nous dirons aussi que 3 est *l'image* de 2 par f.

Définition 1

Soit $\mathscr{D}$ un ensemble de nombres.

On définit une *fonction f sur $\mathscr{D}$* en associant à chaque nombre x appartenant à $\mathscr{D}$ un seul nombre y, noté $f(x)$.

Nous dirons que f est une fonction de la *variable* x.

Nous dirons que $\mathscr{D}$ est *l'ensemble (ou domaine) de définition* de f.

Exemples.

1.

Il existe une notation schématique qui regroupe toutes les informations de la définition.

$\mathscr{D}$ est *l'ensemble* (ou *domaine*) *de définition* de f. $\mathscr{D}$ est l'ensemble des nombres auxquels un nombre est associé par f. On dit que f est définie sur $\mathscr{D}$.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y \end{array} \right.$$

Cette présentation se lit : « la fonction f, définie sur $\mathscr{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et qui à x associe y ».

x est *un antécédent* de y par f.

y est *l'image* de x par f. On le note $f(x)$ et on lit « f de x ».

Remarques.

1. La première ligne ($\mathscr{D}$ et $\mathbb{R}$) est celle des ensembles, la seconde (x et y) celle des variables.
2. La première colonne ($\mathscr{D}$ et x) correspond à l'axe des abscisses, la seconde ($\mathbb{R}$ et $y = f(x)$) à celui des ordonnées.
3. Le préfixe « anté- » signifie avant (latin).
4. « un » antécédent car il peut y en avoir plusieurs.
5. « l' »image car (par construction) il ne peut y en avoir qu'une.

II Représenter des liens par une formule de calcul ou un procédé implicite.

Très souvent les liens entre les nombres seront représentés par des calculs. Par exemple nous écrirons

$$f : x \mapsto 2x - 1,$$

et nous lirons « la fonction f qui à x associe $2x - 1$ », pour indiquer qu'à chaque nombre x choisi nous associerons le résultat du calcul $2x - 1$.

Ce lien que vous avez déjà rencontré au collège défini une fonction affine.

Exemples.

1. Les fonctions affines.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax + b \end{array} \right.$$

où $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Les fonctions linéaires.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax \end{array} \right.$$

où $a \in \mathbb{R}$.

3. Les fonctions constantes.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & b \end{array} \right.$$

où $b \in \mathbb{R}$.

4. La fonction carré.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$$

5. La fonction cube.

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x^3\end{array}\right.$$

6. La fonction inverse.

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}* & \rightarrow & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \frac{1}{x}\end{array}\right.$$

où $\mathbb{R}^* =]-\infty.0[\cup]0;+\infty[=\mathbb{R}\setminus\{O\}$.

7. La fonction racine carrée.

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \sqrt{x}\end{array}\right.$$

où $\mathbb{R}_+ = [0;+\infty[$.

Remarques.

1. Si, pour les modélisations en sciences expérimentales (physique, chimie, biologie, géologie, économie,...), les fonctions constantes et linéaires correspondent à des modélisations spécifiques, pour l'étude mathématique, elles ne sont que des cas particuliers de fonctions affines.
2. Pour la fonction racine carrée nous n'avons pas réellement une formule. Nous ne connaissons que les racines carrées des carrés parfaits (0, 1, 4, 9, 16, ...). L'utilisation du symbole $\sqrt{}$ n'indique pas un procédé de calcul pour obtenir ne serait-ce qu'une valeur approchée de la valeur désirée. Nous verrons des algorithmes pour obtenir des valeurs approchées.

   Il s'agit, hormis pour les carrés parfaits, d'un procédé de définition implicite : la racine carrée est l'antécédent positif par la fonction carrée.

III Tableau de valeurs.

Il est possible de représenter les nombres reliés par une fonction en les plaçant en vis-à-vis dans un tableau.

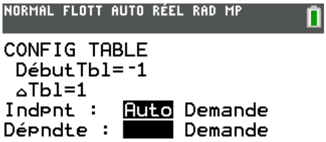
Par exemple, en utilisant la fonction affine précédente, nous voyons :

$$f(-1) = 2\times(-1)-1 = -3.$$

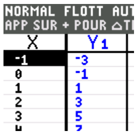
x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-1	1	3	5

Il est possible d'obtenir un tel tableau grâce à votre calculatrice. Appuyez sur $\boxed{f(x)}$. Entrez la formule de calcul pour f :

Faites $\boxed{\text{2de}}$ puis $\boxed{\text{fenêtre}}$ (*def tab*). Choisissez -1 comme première valeur de x et un pas de 1 (augmentation de la valeur de x).



Enfin pour voir le tableau de valeur faites $\boxed{\text{2de}}$ puis $\boxed{\text{graphe}}$ (*table*).



IV Représentation graphique.

Définition 2

Soient :

. $\mathscr{D}$ un ensemble de nombres,

. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ une fonction.

La *courbe représentative de f*, que nous noterons souvent $\mathscr{C}_f$ est l'objet géométrique formé de tous les points de coordonnées $(x; f(x))$ (dans un certain repère) lorsque x prend toutes les valeurs possibles dans $\mathscr{D}$.

Remarques.

1. La courbe représentative (pas le dessin mais l'ensemble des couples $(x; f(x))$) est le point de vue retenu pour la définition générale d'une fonction.

2. Comme $f(x)$ est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse x nous dirons aussi que $\mathscr{C}_f$ est la *courbe d'équation* $y = f(x)$.

Exemples.

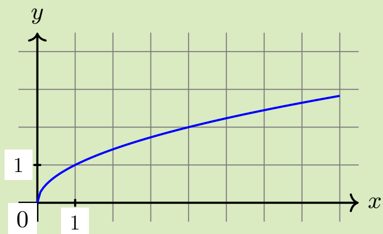
1. Fonction affine. La courbe est une *droite* (nous le démontrerons après avoir défini proprement les droites).
2. Fonction carré. La courbe est une *parabole*.
3. Fonction Cube.
4. Fonction Inverse. La courbe est une *hyperbole*.
5. Fonction racine carrée. La courbe est une branche de parabole.

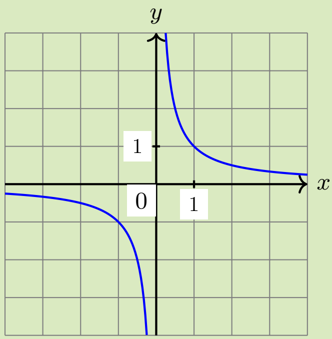
Exercice 1.

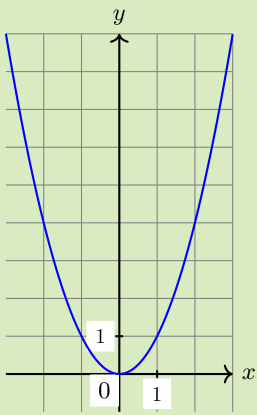
Associez, sans aucune justification, chaque fonction à sa courbe représentative.

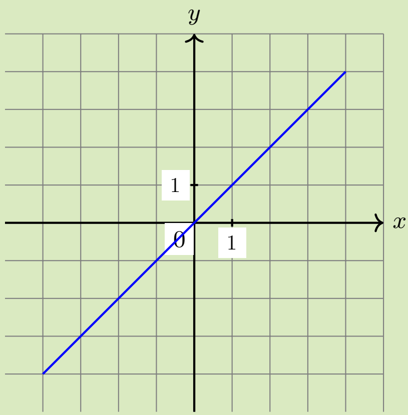
$f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $\quad f_2 : x \mapsto x$,

$f_3 : x \mapsto \sqrt{x}$, $\quad f_4 : x \mapsto x^2$.









Exercice 2.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $y = 2x^2 - 4x - 1$ (*i.e.* la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 2x^2 - 4x - 1$), où x est un réel de l'intervalle $[-2; 2]$.

1. (a) Les points $A(0; 2)$ et $B(-1; 7)$ appartiennent-ils à $\mathscr{C}$?
   (b) Calculez l'ordonnée du point D de $\mathscr{C}$ dont l'abscisse est 2.
2. (a) Construisez un tableau de valeur de y pour x variant de -2 à 2 avec un pas de 1.
   (b) Tracez $\mathscr{C}$ dans un repère.

Correction de l'exercice 2

Les fonctions sont des outils assez récents mais la géométrie repérée s'intéressait aux courbe depuis longtemps. Ce sont les équations (égalités liant abscisses et ordonnées) qui étaient privilégiées. Vous pouvez comprendre $y = 4x^2 - 2x - 1$ comme $f : x \mapsto 4x^2 - 2x - 1$

1. Le point A est un point de la courbe représentative de f, autrement dit $A \in \mathscr{C}_f$ si et seulement si $A(x_A; f(x_A))$. Autrement dit si $f(x_A) = y_A$.

   *

   $$\begin{aligned} f(x_A) &= f(0) \\ &= 2 \times 0^2 - 4 \times 0 - 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

   Comme $f(x_A) \neq y_A$

   $$\boxed{A \notin \mathscr{C}_f.}$$

   * De même

   $$\begin{aligned} f(x_B) &= f(-1) \\ &= 2 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) - 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

   puisque $f(x_B) \neq y_B$

   $$\boxed{B \notin \mathscr{C}_f.}$$

2. Puisque $D \in \mathscr{C}_f$:

   $$y_D = f(x_D)$$

Or, d'après l'énoncé, $x_D = 2$ donc

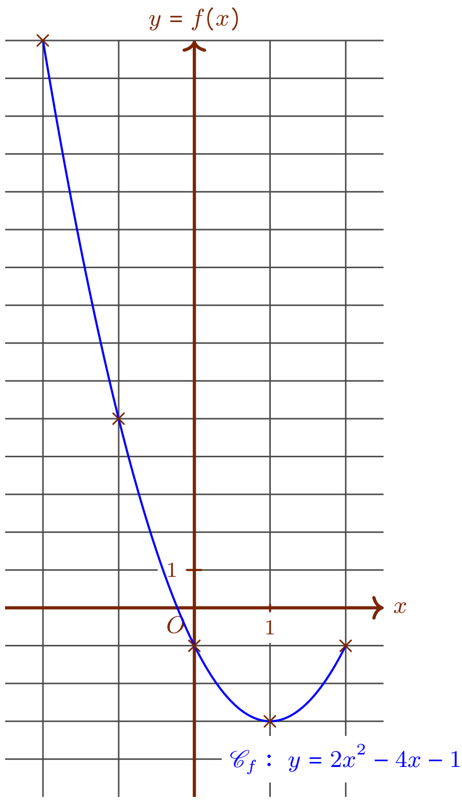
$$\begin{aligned} y_D &= f(2) \\ &= 2 \times 2^2 - 4 \times 2 - 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$D(2; -1).$$

3. (a) D'après la calculatrice :

x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$	15	5	-1	-3	-1

(b)



Exercice 3.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f : x \mapsto 2x^2 + 6$.

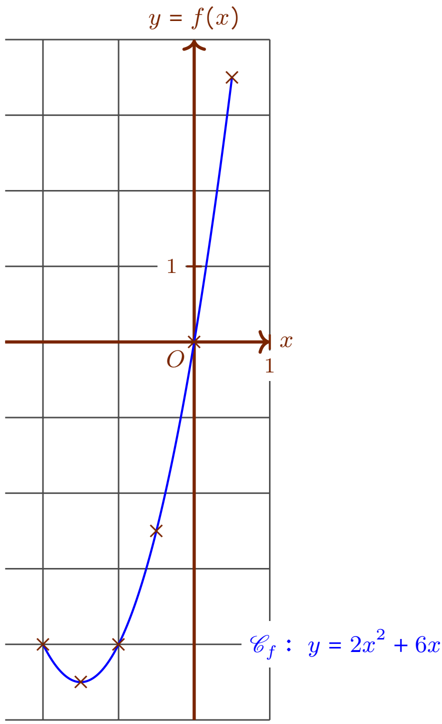
1. Donnez sans justification le tableau de valeur de f pour x variant de -2 à $0,5$ avec un pas de $0,5$.
2. Tracez $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé.
3. Le point $M(0,4; 2,72)$ appartient-il à $\mathscr{C}$?
4. Quelle est l'ordonnée du point K de $\mathscr{C}$ d'abscisse $0,3$?
5. Déterminez algébriquement l'abscisse de chacun des deux points de $\mathscr{C}$ d'ordonnée 0.

Correction de l'exercice 3

1. Tableau de valeurs de y (alias f).

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$
$y = f(x)$	-4	$-4,5$	-4	$-2,5$	0	$3,5$

2. (a)



3. $f(0,4) = 2 \times 0,4^2 + 6 \times 0,4 = 2,72$.

$$M \in \mathscr{C}_f.$$

4. (a) $f(0,3) = 1,98$. Donc

$$K(0,3; 1,98).$$

(b) Si un point N est sur la courbe $\mathscr{C}_f$ alors ses coordonnées sont de la forme $(x; f(x))$.
Donc dire que l'ordonnée de N vaut 0 signifie que $f(x) = 0$. Nous cherchons x tel que

$$f(x) = 0$$

Ce qui équivaut succcessivement à :

$$2x^2 + 6x = 0$$

Il s'agit d'une équation qui n'est pas linéaire nous essayons de nous ramener à une équation produit-nul.

$$\begin{aligned}
2x \times x + 6 \times x &= 0 \\
(2x + 6) \times x &= 0 \\
2x + 6 = 0 \quad &\text{ou} \quad x = 0 \\
2x + 6 - 6 = 0 - 6 \quad &\text{ou} \quad x = 0 \\
2x = - \quad &\text{ou} \quad x = 0 \\
\frac{2x}{2} = \frac{-6}{2} \quad &\text{ou} \quad x = 0 \\
x = -3 \quad &\text{ou} \quad x = 0
\end{aligned}$$

Les points d'ordonnées 0 de $\mathscr{C}_f$ ont pour coordonnées $(-3; 0)$ et $(0; 0)$.

Exercice 4.

Correction de l'exercice 4

Par lecture graphique :

x	-2	-1 ou 2	0	-2 ou 1	2
$f(x)$	-2	0	-1	-2	0

Exercice 5.

Correction de l'exercice 5

Seules les courbes 1, 2 et 5 sont des courbes représentatives de fonctions. Les autres ne respectent l'unicité de l'image associée à une valeur de départ.

Exercice 6.

Correction de l'exercice 6

1. * $\mathscr{D}_1 = [0;10,5]$. $f(0) = 0$ et $f(10,5) = 30$.
   * $\mathscr{D}_2 = [0;7,3]$. $f(0) = 0$ et $f(7,3) = 30$.
   * $\mathscr{D}_3 = [0;9,7]$. $f(0) = 0$ et $f(9,7) = 30$.

   Les verres n'ont pas tous la même hauteur mais ils sont tous vides au début et leur contenance totale est la même.
2. $V_1(5,5) = 16$, $V_2(3,65) = 3,5$, $V_3(4,85) = 7$.
   $V_1^{-1}(\{15\}) = \{5,3\}$, $V_2^{-1}(\{15\}) = \{5,8\}$, $V_3^{-1}(\{15\}) = \{7\}$.
3. $(6;17)$: pour une hauteur de 6 les verres 1 et 2 contiennent tout deux 17.
   $(4;4,9)$: pour une hauteur de 4 les verres 1 et 3 contiennent tout deux $4,9$.
   $(9;26)$: pour une hauteur de 9 les verres 1 et 3 contiennent tout deux 26.
   $(0;0)$: pour une hauteur nulle les verres ne contiennent pas de liquide.
4. C'est impossible car il n'y a pas de points qui soit un point d'intersection pour les trois courbes simultanément hormis l'origine du repère qui correspond à des verres vides.

Exercice 7.

Correction de l'exercice 7

1. $P(h) = 1$ si et seulement si $h = \frac{4}{3}$.
   $V_B = \frac{4}{3} \times V_{C(1)}$.
2. Il faut que $h = 2$ et dans ce cas :

   $$h(2) = \frac{2}{3}$$

   ce qui équivaut successivement à :

   $$\begin{aligned} \frac{V_B}{V_{C(2)}} &= \frac{2}{3} \\ \frac{V_B}{V_{C(2)}} \times V_{C(2)} &= \frac{2}{3} \times V_{C(2)} \\ V_B &= \frac{2}{3} V_{C(2)} \end{aligned}$$

V Conjecturer des résolutions d'équation grâce aux courbes représentatives.

1 Équation de la forme $f(x) = a$.

Exemples.

Exemples.

1. Résoudre l'équation $-2x + 3 = 1$.
2. $x^2 = 4$.
3. $x^3 = 1$.

Résoudre une équation (problème du domaine de l'algèbre) peut être interpréter comme la recherche d'antécédents par une fonction (problème du domaine de l'analyse).

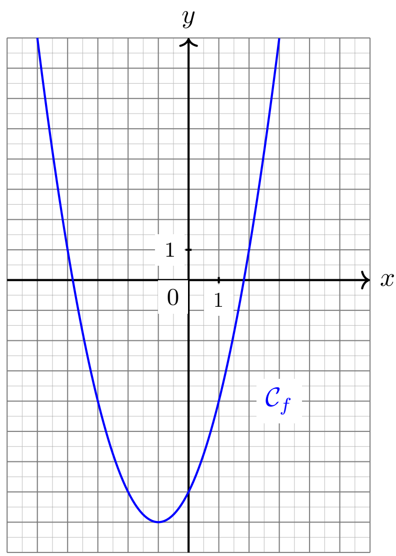
L'inconvénient de cette méthode : ce n'est pas une démonstration et nous ne pouvons que conjecturer.

L'avantage : avec l'informatique il est très rapide et facile d'obtenir la courbe représentative d'une fonction et donc de faire une lecture graphique.

Pour conjecturer les solutions de l'équation $x^2 + 2x - 7 = 3$ nous introduisons la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x - 7 \end{array} \right.$$

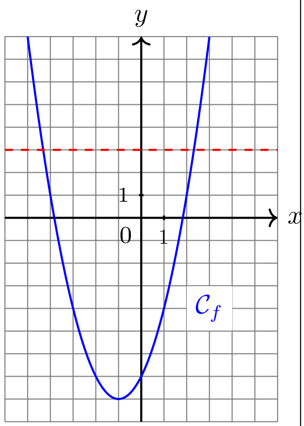
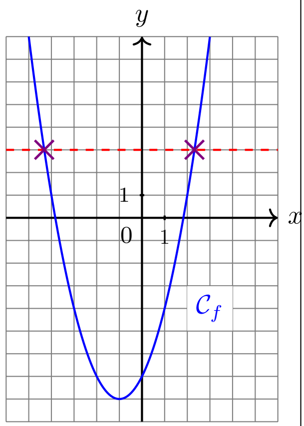
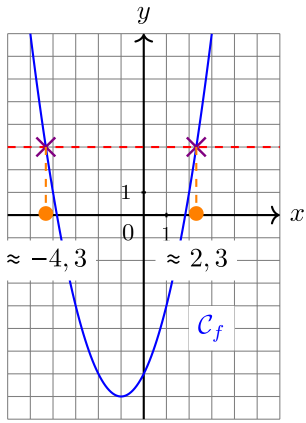
puis traçons sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ avec un logiciel :



Résoudre l'équation équivaut donc à rechercher les antécédents de 3 par la fonction f.

Les solutions de l'équation $f(x) = 3$ sont les abscisses des points de la courbe d'ordonnée 3.

Concrètement pour les trouver il faut suivre les étapes suivantes.

<table>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th></tr>
<tr><td>Dessinez l’ordonnée 3.</td><td>Identifiez les points d’intersections.</td><td>Lire les abscisses correspondantes.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Conclusion : l’ensemble des solutions de l’équation $x^2+2x-7=3$ est $\{-4,3\ ;\ 2,3\}$.

Remarques.

Remarques.

1. Inconvénients de la méthode :
   — Comme pour toute lecture graphique les résultats sont approximatifs (insuffisant en mathématique)
   — il s’agit d’une partie de la courbe et nous ne savons pas ce qu’il en est pour le reste de la courbe.

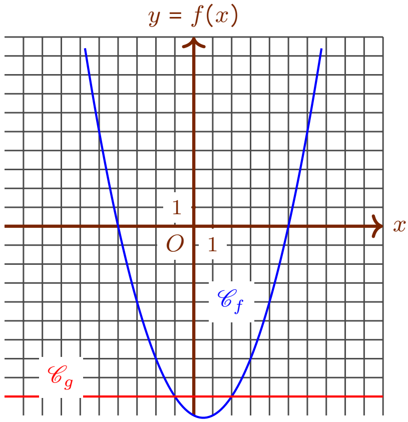
Exercice 8.

Déterminez graphiquement les solutions des équations suivantes :

1. $0,5x^2-0,5x-10=-9$.
2. $-\frac{1}{4}(x^2+7x+6)=-3$.

Correction de l’exercice 8

1. Avec la calculatrice nous traçons les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto 0,5x^2-0,5x-10$ et $g : x \mapsto -9$.



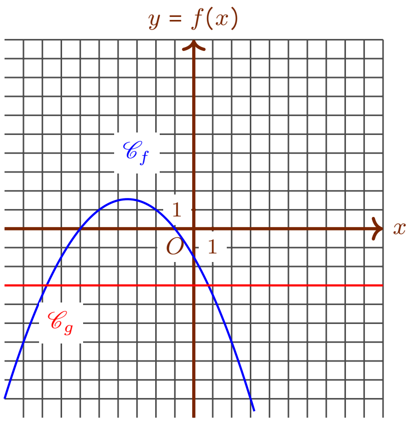
Par lecture nous pouvons conjecturer que

l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{-1; 2\}$.

Si pouvons vérifier que -1 et 2 sont effectivement des solutions en remplaçant dans l'équation rien ne garanti que nous ayons toutes les solutions : peut être le graphique ne nous montre-t-il pas tous les points d'ordonnée -9.

Nous en restons donc à une conjecture sans pouvoir affirmer que nous avons résolu l'équation.

2. Avec la calculatrice nous traçons les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto -\frac{1}{4}(x^2 + 7x + 6)$ et $g : x \mapsto -3$.



Exercice 9.

Résolvez graphiquement puis algébriquement les équations suivantes.

a) $(E_1) : -\frac{1}{3}x + 3 = 1.$

b) $(E_2) : x^2 = 4.$

c) $(E_3) : x^2 = 6.$

d) $(E_4) : 3x^2 = 48.$

e) $(E_5) : (x+1)(x-2) = -2.$

Correction de l'exercice 9

1.

$$\begin{aligned}
(E_1) &\Leftrightarrow -\frac{1}{3}x + 3 = 1 \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{3}x + 3 - 3 = 1 - 3 \\
&\leftrightarrow -\frac{1}{3}x = -2 \\
&\Leftrightarrow -3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)x = -3 \times (-2) \\
&\Leftrightarrow x = 6
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est

$$\boxed{\mathscr{S}_1 = \{6\}.}$$

2. Nous remarquons une équation qui n'est pas linéaire. Nous allons donc essayer de nous ramener à une équation produit-nul.

$$\begin{aligned}
(E_2) &\Leftrightarrow x - 4 = 4 - 4 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0
\end{aligned}$$

Nous avons une équation égale à 0 il faut maintenant obtenir un produit, c'est-à-dire factoriser. Nous avonc deux méthodes de factorisation qui restent du collège : facteur commun (autrement dit distributivité) et identié remarquable (uniquement $a^2 - b^2$). Ici il n'y a pas de facteur commun. Par contre :

$$\begin{aligned}
(E_2) &\Leftrightarrow x^2 - 2^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0
\end{aligned}$$

Nous reconnaissons un produit nul donc :

$$\begin{aligned}
(E_2) &\Leftrightarrow x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -2
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E_2) est

$$\boxed{\mathscr{S}_2 = \{2; -2\}.}$$

3. De même

$$(E_3) \iff (x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6}) = 0$$

$$\boxed{\mathscr{S}_3 = \{\sqrt{6}; -\sqrt{6}\}.}$$

4. De même

$$(E_4) \iff 3(x - 4)(x + 4) = 0$$

$$\boxed{\mathscr{S}_4 = \{4; -4\}.}$$

5.

$$\begin{aligned}(E_5) &\iff (x+1)(x-2)+2 = -2+2\\ &\iff (x+1)(x-2)+2 = 0\end{aligned}$$

À ce stade nous bloquons : impossible de factoriser. E désespoire de cause esssayons de tout développer.

$$\begin{aligned}(E_5) &\iff x \times x + x \times (-2) + 1 \times x + 1 \times (-2) + 2\\ &\iff x^2 - 2x + x - 2 + 2 = 0\\ &\iff x^2 - x = 0\end{aligned}$$

Maintenant que tout est développé nous recommençons à essayer de factoriser : il y a maintenant un facteur commun.

$$\begin{aligned}&\iff x(x-1) = 0\\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 1 = 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_5 = \{0; 1\}.}$$

Exercice 10.

Exercice 50 page 59 du manuel lelivrescolaire.fr.

Correction de l'exercice 10

1. (a) $f(x) = -0,5 \Leftrightarrow x \in \{-0,8\}$.
   (b) Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $f(x) = k$ admet une unique solution.
2. (a) $f(x) = -0,5 \Leftrightarrow x \in \{0\}$.
   (b) Si $k = 0$, alors $f(x) = k$ admet une unique solution sinon $f(x) = k$ admet deux solutions distinctes (et opposées).
3. (a) $f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \{0\}$.
   (b) Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $f(x) = k$ admet une unique solution.
4. (a) $f(x) = 2 \Leftrightarrow x \in \{2,3\}$.
   (b) Répondons à la question pour la courbe d).

k	$]-\infty;-1,2[$	$\{1,2\}$	$]-1,2;0[$	$\{0\}$	$]0;+\infty[$
Nombre de solutions de $f(x) = k$.	1	2	3	2	1

Exercice 11.

Correction de l'exercice 11

1. $H(1) = 1$. Au bout d'un mois l'arbre mesure 1 mètre.
2. $H(t) > 2$ si et seulement si $t > 2,5$. Ils seront commercialisable lorsque $t \in [2,5;+\infty[$.
3. En année arrondie au bout de 2 ans. En mois : au bout de 19 mois.
4. Tous les $2,5$ mois.

2 Équation : $f(x) = g(x)$.

Exemples.

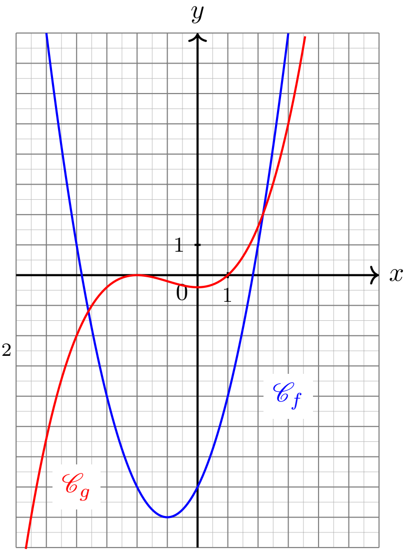
1. $x = x^2$.
2. $x^2 = x^3$.
3. $x = \sqrt{x}$.
4. $x = \frac{1}{x}$.

Pour conjecturer les solutions de l'équation $x^2 + 2x - 7 = 0,1(x+2)^3 - 0.3(x+2)^2$ nous introduisons encore les fonctions

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x - 7 \end{array} \right. \text{ et}$$

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0,1(x+2)^3 - 0.3(x+2)^2 \end{array} \right.$$

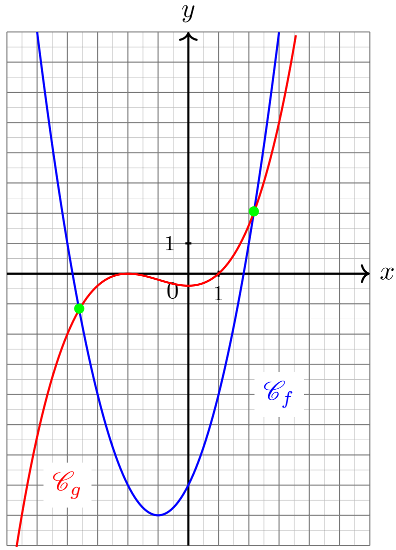
puis traçons leurs courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ avec un logiciel.

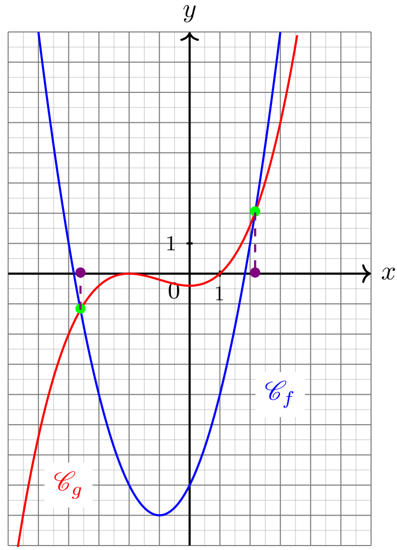


Les solutions de l'équation $f(x) \leqslant g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Les étapes de la recherche sont les suivantes :

1	2
Identifiez les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.	Lire les abscisses correspondantes.





Enfin donnez les solutions sous forme d'ensemble : l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 7 = 0,1(x+2)^3 - 0.3(x+2)^2$ est $\{-3,6\ ;\ 2,2\}$.

Exercice 12.

Exercice 52 page 60 du manuel lelivrescolaire.fr.

Correction de l'exercice 12

1. $f(x) = g(x) \iff x \in \{-0,5\}$.
2. $f(x) = g(x) \iff x \in \{0;3\}$.

Exercice 13.

Résolvez graphiquement les équations proposées dans l'exercice 53 page 60 du manuel lelivrescolaire.fr. Il vous manque un outil pour la résolution algébrique de la question 3.

Correction de l'exercice 13

1. Résolvons l'équation.

$$2x+3=5$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}2x+3-3&=5-3\\2x&=2\\\frac{2x}{2}&=\frac{2}{2}\\x&=1\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S}=\{1\}$.

2. Résolvons l'équation.

$$3x-2=-4x+\frac{1}{3}$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}3x+2+4x&=-4x+\frac{1}{3}+4x\\7x+2&=\frac{1}{3}\\7x+-2&=\frac{1}{3}-2\\7x&=\frac{7}{3}\\\frac{1}{7}\times 7x&=\frac{1}{7}\times\frac{1}{3}\\x&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S}=\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

3. Résolvons l'équation.

$$9x^2=6x-1$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
9x^2-(6x-1) &= 6x-1-(6x-1)\\
9x^2-6x+1 &= 0\\
(3x)^2-2\times 3x\times 1+1^2 &= 0\\
(3x-1)^1 &= 0\\
3x-1 &= 0\\
3x-1+1 &= 0+1\\
3x &= 1\\
\frac{3x}{3} &= \frac{1}{3}\\
x &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

L'ensemble de solution est $\mathscr{S}=\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

4. Résolvons l'équation.

$$\begin{aligned}
2x^3-x &= 3x^2-x\\
2x^3-x-(3x^2-x) &= 3x^2-x-(3x^2-x)\\
2x^3-x-3x^2+x &= 0\\
2x^3-3x^2 &= 0\\
x^2\times 3x-x^2\times 3 &= 0\\
x^2(2x-3) &= 0\\
x^2 = 0 \quad &\text{ou} \quad 2x-3=0\\
x = 0 \quad &\text{ou} \quad 2x=3\\
x = 0 \quad &\text{ou} \quad x=\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S}=\left\{\frac{3}{2};0\right\}$.

VI Parité.

Recherchons des symétrie dans les courbes représentatives des fonctions de références : fonction carré et cube.

Nous remarquons des symétries axiales ou centrales.

C'est propriétés géométriques se traduisent par des propriétés algébriques (concernant la formule de calcul).

1 Définition algébrique.

Définition 3

Soient :

. $\mathscr{D}_f$ un ensemble de réels symétrique par rapport à 0, autrement dit si $x \in \mathscr{D}_f$, alors $-x \in \mathscr{D}_f$,

. $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$.

Nous dirons que f est *paire* si et seulement si, quelque soit $x \in \mathscr{D}_f$,

$$f(-x) = f(x).$$

Nous dirons que f est *impaire* si et seulement si, quelque soit $x \in \mathscr{D}_f$,

$$f(-x) = -f(x).$$

Exemples.

1. La fonction carré est paire.
2. La fonction cube est impaire.
3. La fonction racine carrée n'est ni paire ni impaire.
4. $x \mapsto x^n$ est paire si et seulement si n est pair (c'est l'origine du nom de cette propriété.
5. La fonction inverse est un exemple de fonction impaire qui n'est pas (vraiment) une fonction puissance.
6. La fonction racine carrée n'est ni paire ni impaire car son domaine de définition n'est pas symétrique par rapport à 0.
7. La fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x-3 \end{array} \right.$ n'est ni paire ni impaire (il suffit d'exhiber un contre-exemple).
8. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + \frac{1}{x} \end{array} \right.$ est une fonction impaire.

2 Interprétation géométrique.

Proposition 1

Soient :

. $\mathscr{D}_f$ un ensemble de réels symétrique par rapport à 0,

. $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction (définie sur $\mathscr{D}_f$),

. $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (O, I, J).

(i) f est paire si et seulement si sa courbe représentative, $\mathscr{C}_f$, présente une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

(ii) f est impaire si et seulement si sa courbe représentative, $\mathscr{C}_f$, présente une symétrie par rapport à l'origine du repère.

Démonstration

Pour simplifier la démonstration nous supposerons que le repère est orthonormé.

(i) (a) Démontrons l'implication directe : supposons que f est paire et démontrons qu'alors, forcément, $\mathscr{C}_f$ présente une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Soit $x \in \mathscr{D}_f$.

Par définition de la courbe représentative : $P\,(x, f(x)) \in \mathscr{C}_f$ et $P'\,(-x, f(-x)) \in \mathscr{C}_f$.

* Montrons que le milieu M de $[PP']$ est sur l'axe des ordonnées.

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_P + x_{P'}}{2} \\ &= \frac{x + (-x)}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc M appartient à l'axe des ordonnées.

* Montrons que que l'origine du repère appartient à la médiatrice de $[PP']$.

Le repère étant orthonormé :

$$\begin{aligned} OP &= \sqrt{(x_P - x_O)^2 + (y_P - y_O)^2} \\ &= \sqrt{(x-0)^2 + (f(x)-0)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + f(x)^2} \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} OP' &= \sqrt{(x_{P'} - x_O)^2 + (y_{P'} - y_O)^2} \\ &= \sqrt{(x-0)^2 + (f(-x) - 0)^2} \end{aligned}$$

f étant paire $f(-x) = f(x)$ donc

$$OP' = \sqrt{x^2 + f(x)^2}$$

Ainsi $OM = OM'$. Autrement dit O appartient à la médiatrice de $[PP']$.

Si M et O sont deux points distincts alors (OM) est la médiatrice de $[PP']$ (sinon P et P' sont bien symétriques puisque appartenant à l'axe des abscisses). Mais comme O et M sont sur l'axe des ordonnées cela signifie que l'axe des ordonnées est la médiatrice de $[PP']$.
Autrement dit : P est symétrique de P' par rapport à l'axe des ordonnées.

Le raisonnement étant valable pour tous points P et P' nous avons démontré que la courbe toute entière est symétrique.

Si f est paire alors $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

■

Exercice 14.

Exercice 15.

Exercice 16.

Exercice 17.

Déterminez toutes les valeurs de a et b des réels pour lesquels la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est impaire.
Même question pour paire.

VII Des fonctions avec Python.

Il existe une instruction pour définir une fonction dans un programme en Python qu'il est ensuite loisible d'utiliser pour faire d'autres calculs dans le même programme.

Voici comment définir la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2x + 1$:

```
def f(x):
    y=x**2-2*x+1
    return(y)
```

Pour calculer l'image de 3 par f il suffit alors de taper dans Python (un shell ou un script) :

```
f(3)
```

Remarques.

Remarques.

1. Il n'y a pas d'ensemble de définition à préciser pour une fonction en Python. S'il y a des valeurs interdites un message d'erreur s'affichera.
2. Les fonctions en Python permettent de nombreux calculs intermédiaires pour le calcul du y. Il est notamment possible d'utiliser des boucles.
3. Les fonctions Python sont très utilisées car elles servent de sous-programme dans un long programme.