

Identités remarquables.

Les identités à connaître par cœur.

Exercices.

EXERCICE 1. Développez les expressions polynomiales suivantes.

- a) $A(x) = (x + 6)^2$. b) $B(x) = (x - 11)^2$. c) $C(x) = (x + 3^2)(x - 3^2)$.
d) $D(x) = (2x - 3)^2$. e) $E(x) = (-7x + 3)^2$. f) $F(x) = (3x - 6)(3x + 6)$.
g) $G(x) = x(5x - 7)^2$.

EXERCICE 2. Factorisez les expressions polynomiales suivantes.

- a) $A(x) = x^2 + 6x + 9$. b) $B(x) = 49x^2 - 14x + 1$. c) $C(x) = x^2 + 2x + 1$.
d) $D(x) = x^2 - 8$. e) $E(x) = x^4 - 49$.

EXERCICE 3. Résolvez les équations.

- a) $x^2 = 81$. b) $9x^2 - 42x + 49 = 0$. c) $x^2 + 4 = 0$.
d) $x^4 - 16 = 0$. e) $3x = -\frac{1}{4}x^2 - 9$. f) $x^2 = 14x - 7$.

EXERCICE 4. Soit $f : x \mapsto (x + 1)^2 - 4$.

- Développez $f(x)$.
- Factorisez $f(x)$.
- Parmi les trois formes précédentes de $f(x)$, choisissez la plus adaptée pour :
 - calculez $f(0)$, $f(1)$, $f(-3)$, $f(-1)$, $f(\sqrt{3})$.
 - résolvez l'équation $f(x) = 0$.
 - résolvez l'équation $f(x) = -4$.
 - résolvez l'équation $f(x) = -3$.

EXERCICE 5. Résolvez les équations suivantes en vous ramenant à des équations du premier degré.

- a) $4x^2 - (x + 1)^2 = 0$. b) $(2x + 1)^2 - (x + 2)^2 = 0$.
c) $(2x + 7)^2 - 9(x + 2)^2 = 0$. d) $4(2x + 7)^2 - 9(x + 3)^2 = 0$.
e) $(4x^2 - 3x - 18)^2 = (4x^2 + 3x)^2$. f) $(2x - 3)(x - 1)^2 = 4(2x - 3)$.
g) $(5x - 10)(x - 3) - 3(x^2 - 4) = 0$. h) $(x^2 + 1)(4 - 3x) - 8x + 6x^2 = 0$.
i) $(9x^2 - 1)^2 - 4(3x + 1)^2 = 0$. j) $\left(\frac{3x}{5} - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{5} + \frac{2}{3}\right)^2 = 0$.
k) $\left(\frac{2x + 3}{4}\right)^2 = \left(\frac{5 - 3x}{12}\right)^2$. l) $(x^2 - 16)^2 = (x + 4)^2$.
m) $9x^3 + 18x^2 - x - 2 = 0$. n) $x^3 + 2x^2 - 5x - 10 = 0$.
o) $x^3 - 8 - 2(x^2 - 4) = 0$.

EXERCICE 6. Soit $A(x) = (x^2 - 9)^2 - (x + 3)^2$.

- Développez $A(x)$.
- Factorisez $A(x)$ par deux méthodes différentes. Calculez $A(x)$ successivement pour $x = 0$, $x = 4$, $x = \sqrt{6}$.

EXERCICE 7.

- Développez $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$, pour x non nul.
- On suppose que $x + \frac{1}{x} = 3$; que vaut alors $x^2 + \frac{1}{x^2}$?

EXERCICE 8.

1. Démontrez les identités suivantes.

a) $(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$;

b) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$;

c) $(x^2 + xy)^2 + (y^2 + xy)^2 = (x^2 + y^2)(x + y)^2$;

d) $(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$.

2. Déduisez de d) des entiers relatifs non nul x , y et z vérifiant $x^2 = y^2 + z^2$; vous en donnerez au moins trois exemples.