Identités remarquables.

Une identité est une égalité qui est toujours vraie (contrairement par exemple à une équation). Par exemple : $2(x+3) = 2x+6$ en est une.

Les identités à connaître par cœur.

Proposition 1. Pour tous nombres a et b : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Démonstration. Soient a et b des nombres réels (sous-entendu quelconque).

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)\times(a+b)\\ &= a\times a + a\times b + b\times a + b\times b\\ &= a^2 + ab + ab + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

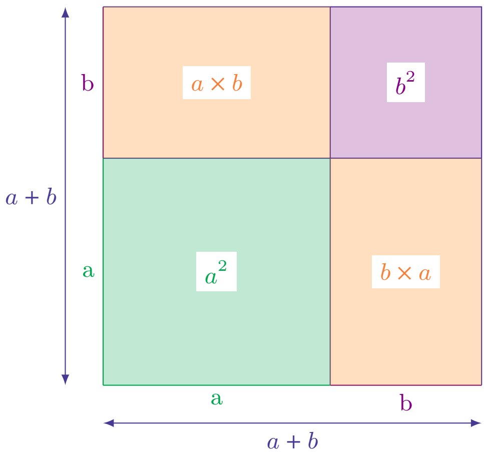
Pour tous $a,b \in \mathbb{R}$, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Exemples.

1. Utilisation pour trouver une forme développée réduite et ordonnée d'un polynôme : $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2\times 2x\times 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$.
2. Utilisation pour factoriser : $9x^2 + 6x + 1 = (3x)^2 + 2\times 3x \times 1 + 1^2$.

Remarques.

1. Une interprétation géométrique de cette identité avec des aires de rectangles.



   L'aire du grand carré $(a+b)^2$ est obtenue comme la somme des aires des deux petits carrés a^2 et b^2 ainsi que de celle des rectangles $a\times b$ et $b\times a$.
2. L'intérêt des identités remarquables réside surtout dans la possibilité de factorisations qui sans cela seraient difficiles.

Proposition 2. Pour tous nombres a et b : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Démonstration. Soient a et b des nombres réels (sous-entendu quelconque).

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)\times(a-b)\\ &= a\times a + a\times(-b) + (-b)\times a + (-b)\times(-b)\\ &= a^2 - ab - ab + b^2\\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

Pour tous $a,b \in \mathbb{R}$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Proposition 3. Pour tous nombres a et b : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Démonstration. Soient a et b des réels.

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a\times a + a\times(-b) + b\times a + b\times(-b)\\ &= a^2 - ab + ab + b^2\\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Pour tous $a,b \in \mathbb{R}$, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Exercices.

EXERCICE 1. Développez les expressions polynomiales suivantes.

a) $A(x) = (x+6)^2$.
b) $B(x) = (x-11)^2$.
c) $C(x) = \left(x+3^2\right)\left(x-3^2\right)$.
d) $D(x) = (2x-3)^2$.
e) $E(x) = (-7x+3)^2$.
f) $F(x) = (3x-6)(3x+6)$.
g) $G(x) = x(5x-7)^2$.

EXERCICE 2. Factorisez les expressions polynomiales suivantes.

a) $A(x) = x^2 + 6x + 9$.
b) $B(x) = 49x^2 - 14x + 1$.
c) $C(x) = x^2 + 2x + 1$.
d) $D(x) = x^2 - 8$.
e) $E(x) = x^4 - 49$.

EXERCICE 3. Résolvez les équations.

a) $x^2 = 81$.
b) $9x^2 - 42x + 49 = 0$.
c) $x^2 + 4 = 0$.
d) $x^4 - 16 = 0$.
e) $3x = -\frac{1}{4}x^2 - 9$.
f) $x^2 = 14x - 7$.

EXERCICE 4. Soit $f : x \mapsto (x+1)^2 - 4$.

1. Développez $f(x)$.
2. Factorisez $f(x)$.
3. Parmi les trois formes précédentes de $f(x)$, choisissez la plus adaptée pour :
   (a) calculez $f(0)$, $f(1)$, $f(-3)$, $f(-1)$, $f\left(\sqrt{3}\right)$.
   (b) résolvez l'équation $f(x) = 0$.
   (c) résolvez l'équation $f(x) = -4$.
   (d) résolvez l'équation $f(x) = -3$.

Exercice 4.

1.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2 \times x \times 1^2 - 4 \\ &= x^2 + 2x - 3 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)^2 - 2^2 \\ &= [(x+1)+2] \times [(x+1)-2] \\ &= (x+3)(x-1) \end{aligned}$$

3. (a)

$$\begin{aligned} f(0) &= 0^2 + 2 \times -3 \\ &= -3 \\ f(1) &= (1+3)(1-1) \\ &= 0 \\ f(-3) &= (-3+3)(-3-1) \\ &= 0 \\ f(-1) &= (-1+1)^2 - 4 \\ &= -4 \\ f(\sqrt{3}) &= \sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3} - 3 \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff (x+3)(x-1) = 0 \\ &\iff x = -3 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} f(x) = -4 &\iff (x+1)^2 - 4 = -4 \\ &\iff (x+1)^2 = 0 \\ &\iff x + 1 = 0 \\ &\iff x = -1 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} f(x) = -3 &\iff x^2 + 2x - 3 = -3 \\ &\iff x^2 + 2x = 0 \\ &\iff x(x+2) = 0 \\ &\iff x + 2 = 0 \text{ ou } x = 0 \\ &\iff x = -2 \text{ ou } x = 0 \end{aligned}$$

EXERCICE 5. Résolvez les équations suivantes en vous ramenant à des équations du premier degré.

a) $4x^2 - (x+1)^2 = 0.$

b) $(2x+1)^2 - (x+2)^2 = 0.$

c) $(2x+7)^2 - 9(x+2)^2 = 0.$

d) $4(2x+7)^2 - 9(x+3)^2 = 0.$

e) $(4x^2 - 3x - 18)^2 = (4x^2 + 3x)^2.$

f) $(2x-3)(x-1)^2 = 4(2x-3).$

g) $(5x-10)(x-3) - 3(x^2-4) = 0.$

h) $(x^2+1)(4-3x) - 8x + 6x^2 = 0.$

i) $(9x^2-1)^2 - 4(3x+1)^2 = 0.$

j) $\left(\dfrac{3x}{5} - \dfrac{1}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{x}{5} + \dfrac{2}{3}\right)^2 = 0.$

k) $\left(\frac{2x+3}{4}\right)^2 = \left(\frac{5-3x}{12}\right)^2$.

l) $(x^2-16)^2 = (x+4)^2$.

m) $9x^3 + 18x^2 - x - 2 = 0$.

n) $x^3 + 2x^2 - 5x - 10 = 0$.

o) $x^3 - 8 - 2(x^2 - 4) = 0$.

EXERCICE 6. Soit $A(x) = (x^2-9)^2 - (x+3)^2$.

1. Développez $A(x)$.
2. Factorisez $A(x)$ par deux méthodes différentes. Calculez $A(x)$ successivement pour $x = 0$, $x = 4$, $x = \sqrt{6}$.

EXERCICE 7.

1. Développez $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$, pour x non nul.
2. On suppose que $x + \frac{1}{x} = 3$; que vaut alors $x^2 + \frac{1}{x^2}$?

EXERCICE 8.

1. Démontrez les identités suivantes.

   a) $(x^2+y^2)(a^2+b^2) = (ax+by)^2 + (ay-bx)^2$;
   b) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$;
   c) $(x^2+xy)^2 + (y^2+xy)^2 = (x^2+y^2)(x+y)^2$;
   d) $(a^2+b^2)^2 = (a^2-b^2)^2 + (2ab)^2$.

2. Déduisez de d) des entiers relatifs non nul x, y et z vérifiant $x^2 = y^2 + z^2$; vous en donnerez au moins trois exemples.