Fractions rationnelles.

I Définition des fractions rationnelles.

Définition 1

Une *fraction rationnelle* est le quotient d'un polynôme par un autre polynôme.

Exemples :

1. Les polynômes sont des fractions rationnelles (dont le dénominateur est le 1).
2. $\frac{1}{X}$ est une fraction rationnelle.
3. Le quotient de deux polynômes de degré 1 est appelé une *homographie*.
4. $\frac{X^3-3X^2+3X+1}{5X^7-1}$ est une fraction rationnelle.

Remarques :

1. Hormis, cas particulier, les fractions rationnelles sont présentées avec des polynômes aux numérateurs et dénominateurs développés, réduits et ordonnés.
2. Les sommes, différences, produits et quotients de fractions rationnelles sont encore des fractions rationnelles.
3. Le degré d'une fraction rationnelle est la différence des degrés des polynômes du numérateur et du dénominateur.

Exercice 1

Écrivez les expressions ci-dessous sous forme de fractions rationnelles :

1. $F_1(X) = \dfrac{X^2-X+1}{X-3} \cdot \dfrac{X}{X^2+1}$.
2. $F_2(X) = \dfrac{\frac{2X+1}{-X+2}}{\frac{7X-1}{8X-2}}$.
3. $F_3(x) = \dfrac{X+2}{X-3} + \dfrac{1}{X}$.
4. $F_4(X) = \dfrac{X-4}{2X} - \dfrac{3X}{X-5}$.

II Fonctions rationnelles.

Si F est une fraction rationnelle, alors la fonction $F : x \mapsto F(x)$ est appelée une *fonction rationnelle*.

La première question que soulève les fonctions rationnelles est celle de leur ensemble de définition. En effet il faut exclure de leur ensemble de définition les valeurs qui annulent leur dénominateur.

Exercice 2

Déterminez les ensembles de définitions des fonctions rationnelles suivantes définies par leur expression algébrique :

1. $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$.
2. $f_2(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 13}{x - 6}$.
3. $f_3(x) = \dfrac{4x - 1}{(x-7)(x+1)}$.
4. $f_4(x) = \dfrac{-3x^7}{x^2 - 7}$.

III Exercices.

Exercice 3

Pour chacune des fonctions rationnelles suivantes

$$f_1(x) = \frac{5+2x}{3-7x} \quad f_2(x) = \frac{4-x}{x(x+2)}$$

1. précisez les valeurs de x qui annulent le dénominateur,
2. dressez le tableau de signe de la fonction,
3. résolvez l'inéquation $f_i(x) \geq 0$ pour $i \in \{1; 2\}$.

Exercice 4

Une entreprise artisanale fabrique des articles de luxe. Elle peut en produire au maximum 50 par mois.

x désigne la quantité d'articles fabriqués en un mois.

Les coûts de production s'élèvent à 250 € par article, plus 6 000 € de frais fixes mensuels. $C(x)$ désigne le coût de fabrication mensuel de ces x articles.

1. Exprimez $C(x)$ en fonction de x.
2. Le coût moyen désigne le coût d'un article. ainsi $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$.
   (a) Vérifiez que $C_M(x) = 250 + \frac{6\,000}{x}$.
   (b) Donnez l'ensemble de définition de la fonction coût moyen.
   (c) Quel est le coût moyen si l'entreprise fabrique 10 articles par mois ? Si elle fabrique 50 articles par mois ?
3. Affichez à l'écran de la calculatrice la représentation graphique de la fonction $C_M(x)$ définie sur $]0; 50]$.
   Vous prendrez comme fenêtre graphique :
   - $5 \leq x \leq 50$, avec un pas de 200.
   - $300 \leq y \leq 2\,000$, avec un pas de 200.
4. Utilisez un graphique et la table de valeurs fournie par la caclculatrice pour répondre aux questions suivantes.
   (a) Donnez un encadrement du coût moyen si l'entreprise fabrique entre 30 et 40 articles par mois.

(b) Déterminez à quel intervalle doit appartenir x pour que le coût moyen soit compris entre 500 € et 850 €.

Exercice 5

Lorsque la vitesse d'une voiture est comprise entre 10 et 130 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, sa consommation d'essence en fonction de sa vitesse est donnée par la fonction :

$$C(v) = 0{,}05v + \frac{125}{v}$$

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction C.
2. À l'aide de la calculatrice, tracez la courbe représentative de cette fonction sur l'intervalle $[10; 130]$.
3. Par lecture graphique, déterminez une valeur approchée du minimum de la fonction C sur l'intervalle $[10; 130]$. On peut aussi conjecturer cette valeur en utilisant la fonction minimum de la calculatrice.
4. Dressez le tableau de variation de la fonction C en utilisant la courbe et la conjecture précédente.
5. (a) Démontrez que, pour tout $x \in [10; 130]$, on a
$$C(x) - 5 = 0{,}05\frac{(x-50)^2}{x}.$$
   (b) Déduisez-en que pour tout réel $x \in [10; 130]$, $C(x) \geq 5$.
6. Calculer $C(50)$ et conclure sur la conjecture émise.

Exercice 6

un artisan fabrique des bonbons. Le coût total de fabrication de x kg de bonbons est donné par la fonction $C(x) = x + 40$ où $C(x)$ est exprimé en euros. L'artisan vend ses bonbons 5 euros le kg.

1. Quel est le coût pour l'artisan lorsqu'il ne fabrique pas de bonbon ? Quand il fabrique 2 kg de bonbons ? 50 kg ? 10 kg ?
2. (a) Quel est la recette de l'artisan lorsqu'il ne fabrique pas de bonbon ? Quand il fabrique 2 kg de bonbons ? 50 kg ? 10 kg ?
   (b) Exprimez le recette en fonction de x.
3. Le bénéfice de l'artisan est la différence entre ses recettes et ses coûts. Nous le notons $B(x)$.
   (a) Calculez $B(x)$ en fonction de x.
   (b) À partir de combien de kilogrammes de bonbons l'artisan fera un bénéfice strictement positif ?
4. L'artisan veut étudier le bénéfice moyen par kilogramme de bonbons fabriqué. Ce bénéfice poyen se calcule par $B_m(x) = \frac{B(x)}{x}$. Il s'exprime en euros par kilogramme. À l'aide de la calculatrice, tracez la courbe du bénéfice moyen.
5. Déterminez le bénéfice pout 15 kg de bonbons vendus. Vérifiez avec la calculatrice.
6. Calculez la quantité de bonbons à fabriquer pour avoir un bénéfice moyen supérieur ou égal à 3 euro par kilogramme.