Équations quotients.

Généralités sur les équations.

Une *équation* est une égalité dans laquelle se trouvent des lettres (des *inconnues* ou *variables*) qui représentent des nombres (expression littérale).

Une équation est soit vraie, soit fausse, suivant les valeurs choisies pour remplacer les lettres.

Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs qui rendent l'équation vraie.

Exemples.

1. $3x^2 + 2$ n'est pas une équation, c'est une expression littérale.
2. $x = 2$ est une équation (qui est dite résolue en x).
3. $y = 2x$ est une équation avec deux inconnues.
4. $3x - 12 = 0$ est une équation de degré 1 (car l'inconnue est à la puissance 1).
5. $x^2 = 16$ est une équation de degré 2.

Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs qui rendent l'équation vraie. Une valeur qui rend une équation vraie est appelée une *solution* de l'équation.

Il n'y a pas une unique méthode de résolution des équations. Il y a presque autant de méthodes que d'équations.

Nous apprendrons certaines de ces méthodes.

Pour simplifier la résolution et pour identifier à quel type d'équation nous avons à faire nous modifierons souvent l'équation de façon à obtenir une égalité à 0.

Nous supposons la méthode de résolution des équations du premier degré.

Modifications autorisées sur les équations.

Théorème 1. On ne modifie pas les solutions d'une équation en additionnant (respectivement en soustrayant, respectivement en multipliant, respectivement en divisant) par un même nombre non nul des deux côtés de l'égalité.

Démonstration.

Par exemple pour l'addition. En logique, pour toutes quantités a et b, et pour toute expression $F(x)$, si $a = b$ alors $F(a) = F(b)$.

En particulier lorsque $F(x) = x + c$, nous obtenons $F(a) = F(b)$ et donc $a + c = b + c$.

La réciproque n'est pas évidente.

Remarques.

1. Attention lorsque vous divisez de vérifier que vous ne divisez pas par zéro.
2. On ne peut multiplier par zéro sans modifier les résultats de l'équation. Le pouvoir absorbant du zéro fait disparaître l'information contenue dans l'équation.
3. Ce résultat constitue une boîte à outils. Il indique des transformations autorisées sur une équation pour en trouver les solutions.
4. Il faut beaucoup s'entraîner pour savoir quelles transformations utiliser pour résoudre telle ou telle équation.
5. Il est bien sûr toujours possible d'ajouter ou soustraire 0 mais c'est sans intérêt.
6. Deux équations qui ont le même ensemble de solutions sont dite *équivalents*.

Exemples.

1. $x^3 + x^2 - 7 = 2x^3 + x^2 - 7$ et $x^3 = 2x^3$ ont le même ensemble de solutions.

Équation quotient nul.

Proposition 1. Soient a et b des nombres réels. Si $\frac{a}{b} = 0$ alors $a = 0$.

Exemples.

1. $\dfrac{3x-1}{7} = 0$.
2. $\dfrac{2x-8}{x-4} = 0$.
3. $\dfrac{6x-24}{-7x+11} = 0$.

Remarques.

1. La proposition n'est pas une équivalence car nous avons la difficulté des valeurs interdites qui peuvent apparaître dans l'équation. Cependant si nous savons que $b \neq 0$ alors il ya équivalence : $\frac{a}{b} = 0 \iff a = 0$.
2. Lorsqu'on résout une équation faisant intervenir une fraction (avec des inconnues au dénominateur) nous résoudrons en deux temps : analyse (recherche des solutions possibles) puis synthèse vérification que les solutions potentielles fonctionne bien.

EXERCICE 1. Résolvez les équations en donnant l'ensemble des solutions.

Exemple : $\frac{x-3}{x+1} = 0$ implique successivement :, $x - 3 = 0$ puis $x = 3$. Puis on vérifie que 3 est bien une solution de l'équation.

a) $\dfrac{x+7}{2x-1} = 0$. b) $\dfrac{3-x}{-4x+1} = 0$. c) $\dfrac{8+x}{x+9} = 0$.

d) $\dfrac{x+\frac{5}{4}}{3x+\frac{1}{2}} = 0$. e) $\dfrac{x-\frac{5}{7}}{x+\frac{1}{3}} = 0$. f) $\dfrac{x+\sqrt{11}}{x-1} = 0$.

Un cas particulier : le produit en croix.

Lorsque l'équation se présente comme une égalité de deux expressions fractionnaires il est possible d'utiliser le produit en croix.

Proposition 2. Soient a, b, c et d des nombres réels. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $ad = bc$.

EXERCICE 2. Résolvez l'équation d'inconnue x : $\dfrac{3x+2}{7x-1} = 2$.

Exercice 2. Avec le produit en croix on perd l'équivalence. Il faut donc procéder à un raisonnement par analyse-synthèse qui est plus long.

* Supposons qu'on ait réussi à trouver un nombre x tel que $\frac{3x+2}{7x-1} = 2$, alors $3x + 2 = 2(7x - 1)$. Cette dernière équation équivaut successivement à :

$$3x + 2 = 2 \times 7x - 2 \times 1$$
$$3x + 2 = 14x - 2$$

Si x est une solution de l'équation alors forcément $x = \frac{4}{17}$.

* Vérifions que la seule solution possible est vraiment une solution :

$$\frac{3 \times \frac{4}{17} + 2}{7 \times \frac{4}{17} - 1} = 2$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \left\{\frac{4}{17}\right\}$.

Exercices.

EXERCICE 3.

Déterminez l'ensemble des valeurs interdites pour le calcul défini pour x réel par

$$\frac{\sqrt{x}}{2x-3}$$

Exercice 3. Il faut utiliser le fait qu'une racine carrée s'applique uniquement à un nombre positif et qu'un quotient ne peut avoir un dénominateur nul.

EXERCICE 4. Résolvez l'équation $\frac{2x-4}{x} = 0$.

Exercice 4.

1. Si x est solution de l'équation alors forcément :

$$\begin{aligned} 2x-4 &= 0 \\ 2x-4+4 &= 0+4 \\ 2x &= 4 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{4}{2} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

   Nous aurions pu utiliser un produit en croix.

2. On vérifie que 2 est bien solution : $\frac{2\times 2-4}{2} = \frac{4-4}{2} = 0$.

La solution de l'équation est 2.

EXERCICE 5. Résolvez l'équation $\frac{2x-4}{x} = 3$.

Exercice 5.

L'expression « résolvez dans $\mathbb{R}$ signifie que nous garderons que les solutions qui sont dans $\mathbb{R}$.

Il y a deux manipulations possibles : en se ramenant à une expression fractionnaire nulle ou en utilisant le produit en croix.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation par analyse-synthèse.

* Analyse.

Si $x \in \mathbb{R}$ est une solution de l'équation, alors nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned} \frac{2x-4}{x} &= 3 \\ \frac{2x-4}{x}-3 &= 3-3 \\ \frac{2x-4}{x} - \frac{3x}{x} &= 0 \\ \frac{2x-4-3x}{x} &= 0 \\ \frac{-x-4}{x} &= 0 \\ -x-4 &= 0 \\ -x-4+4 &= 0+4 \\ -x &= 4 \\ -x\times(-1) &= 4\times(-1) \\ x &= -4 \end{aligned}$$

ou manipulation alternative utilisant le produit en croix :

$$\begin{aligned}\frac{2x-4}{x} &= 3\\ \frac{2x-4}{x} &= \frac{3}{1}\\ (2x-4)\times(1) &= (3)\times(x)\\ 2x-4 &= 3x\\ 2x-4-2x &= 3x-2x\\ -4 &= x\end{aligned}$$

* Synthèse.
  Nous avons vu (dans la phase d'analyse) qu'il ne peut y avoir qu'une seule solution à savoir -4. Or

$$\frac{2\times(-4)-4}{-4} = 3$$

  donc -4 est bien une solution de l'équation.
  Ici nous aurions pu avoir une difficulté si la solution trouvée avait été une valeur interdite.

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\mathscr{S} = \{-4\}.$$

EXERCICE 6. Un litre d'une boisson contient 7 % de sirop. Quel volume d'eau pure doit-on rajouter pour qu'un litre de cette nouvelle boisson contienne 5 % de sirop ?

Exercice 6. Déterminons le volume d'eau à rajouter.

Notons x le volume, exprimé en litre, d'eau pure rajouté dans la boisson.

Après mélange la boisson est composée de $\frac{7}{100}\times 1 = 0{,}07$ L de sirop, de $1-0{,}07 = 0{,}93$ L d'eau et de x litres d'eau.

On souhaite que le mélange contienne 5 % de sirop donc :

$$\frac{0{,}07}{0{,}07+0{,}93+x} = \frac{5}{100}$$

ce qui équivaut successivement à

$$\frac{0{,}07}{1+x} = \frac{5}{100}$$

Puisque $x+1 \neq 0$ (utilisation du produit en croix) :

$$\begin{aligned}0{,}07\times 100 &= (1+x)\times 5\\ 7 &= 5+5x\\ 7-5 &= 5+5x-5\\ 2 &= 5x\\ \frac{2}{5} &= x\end{aligned}$$

Pour que la nouvelle boisson contienne 5 % de sirop il faut rajouter 0,4 L.

EXERCICE 7. $ABCD$ est un carré de côté a (a nombre strictement positif). M est un point du segment $[BC]$. Déterminez le point M de façon que le rapport de l'aire du triangle ABM à celle du trapèze $ADCM$ soit égale à $\frac{1}{3}$.

EXERCICE 8. ABC est un triangle équilatéral de côté a (a nombre strictement positif). Par le point P symétrique de C par rapport à B on trace une droite (Δ) qui rencontre $[AB]$ en M et $[AC]$ en N. On pose $BM = x$. Déterminez x tel que $CN = \dfrac{2a}{3}$.

Exercice 8. Notons R le point de $[BC]$ de sorte que NCR est un triangle équilatéral.

Avec le théorème de Thalès : $\frac{PB}{PR} = \frac{BM}{CN}$ et $CN = \frac{2a}{3}$.