

Inéquation produit-nul.

Exercice 1.

Essayez de résoudre, dans l'ensemble des réels, les inéquations d'inconnue x .

$$(E_1) \quad -3x + 1 < 0$$

$$(E_2) \quad 2(x - 3)(-7x + 14) > 0$$

I Étude du signe d'une fonction factorisée.

Exercice 2.

Étudiez le signe de la fonction f définie sur $[-10; 10]$ par, pour tout $x \in [-10; 10]$

$$f(x) = (3x - 7)x^2(-x + 1)$$

Exercice 3.

Étudiez le signe de $g : \begin{cases} [-6; 4] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto (x + 4)(-x + 2) \end{cases}$

II Résolution d'inéquations.

Inéquation produit.

Exercice 4.

Résolvez l'inéquation $-2(x + 1)(-7 - x) \geq 0$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5.

$$1. \quad (x - 5)(-2x + 6) \geq 0$$

$$2. \quad (3x - 5)(x + 4) > 0$$

$$3. \quad (x + 3)(-x + 6) \leq 0$$

$$4. \quad (-x + 4)(3x + 2) > 0$$

$$5. \quad (10x + 5)(-3x + 4) > 0$$

$$6. \quad (x - 4)(3 - x) \leq 0$$

$$7. \quad (-2x + 3)(5 + x) > 0$$

$$8. \quad 3x(3x - 5) < 0$$

$$9. \quad -(x + 1)^2(2x - 1) \geq 0$$

$$10. \quad -2x(x - 1)(4 - x) \leq 0$$

$$11. \quad x^2(4 - x)(-2x + 1) > 0$$

$$12. \quad x^3(x + 1) < 0$$

$$13. \quad (x^2 + 1)(x - 1) \geq 0$$

$$14. \quad (x - 2)(4 - x) < 0$$

$$15. \quad \left(\frac{3}{4} - x\right)\left(x - \frac{7}{6}\right) \geq 0$$

$$16. \quad (x + \sqrt{3})(x - 4) \geq 0$$

$$17. \quad (3x - 7)(7 - 3x) \leq 0$$

Inéquation se ramenant à une inéquation produit-nul.

Exercice 6.

Justifiez que les inéquations suivantes sont équivalentes

$$(2x - 4)(x + 5) + x > -5 \text{ et } (2x - 3)(x + 5) > 0$$

puis résolvez l'inéquation $(2x - 4)(x + 5) + x > -5$.

Exercice 7.

Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 \leq 16$.

Exercice 8.

Résolvez les inéquation suivantes dans l'ensemble des réels.

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1. $x^2 - 4x \leq -2x - 1$ | 11. $x^2 \leq -16$ |
| 2. $3x(x + 3) - (x + 3)^2 \leq 0$ | 12. $x^2 \leq 0$ |
| 3. $x^3 + 2x^2 + x \geq 0$ | 13. $x^2 < 8$ |
| 4. $x(x + 6) > 3(x + 6)$ | 14. $x^2 \leq 144$ |
| 5. $2x(x - 3) + 3x - 9 < 6x - 18$ | 15. $x^2 \leq 20$ |
| 6. $x^2(1 - 3x) + 4(6x - 2) \geq 0$ | 16. $x^2 - 4 + (x + 2)(2x + 5) < 0$ |
| 7. $(1 - 2x)x - 4x(x + 6) \leq 0$ | 17. $(x + 1)(x - 3) \geq x^2 - 9$ |
| 8. $7 - x^2 < 2x - 2\sqrt{7}$ | 18. $4x - 4 + (x - 1)(x - 4) + x^2 - 1 > 0$ |
| 9. $(x^2 - 1) + 2x - 2 > 6x - 6$ | 19. $(x + 5)^2 \leq (x + 5)(x + 3)$ |
| 10. $x^2 \leq 10$ | 20. $(2x - 1)(x + 3) \geq \left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 6)$ |

Inéquation quotient.

Exercice 9.

Résolvez l'inéquation $\frac{-x+1}{-2x+8} > 0$.

Exercice 10.

Résolvez les inéquations dans $\mathbb{R}$.

1. $\frac{2x-4}{x+2} \leq 0$
2. $\frac{-2x+8}{3x-2} \leq 0$
3. $\frac{2x+4}{x-1} - 2 \geq 0$
4. $\frac{2x+4}{x+1} < 3$
5. $\frac{2x+3}{x+1} \leq \frac{x-6}{x+1}$
6. $1 < \frac{2x+10}{-x+3}$
7. $\frac{x+3}{2x-1} \geq 0$
8. $\frac{2-x}{5-2x} \leq 0$
9. $\frac{3x-1}{-x+5} > 0$
10. $\frac{5x(x-2)}{4x+1} < 0$
11. $\frac{2x^2}{(-x+1)(x+3)} \geq 0$
12. $\frac{-x(x-4)}{2+x^2} \leq 0$
13. $\frac{(x+1)(x-2)}{3-x} > 0$
14. $\frac{9-4x}{11-5x} < 0$
15. $\frac{-5+4x}{2x-1} \geq 0$
16. $\frac{x+1}{3-x} \leq 0$
17. $\frac{7-2x}{2x-1} > 0$
18. $\frac{-5x}{(2x-7)^2} < 0$
19. $\frac{1+2x^2}{7-x} \geq 0$
20. $\frac{x+4}{5-x} < 2$

III Exercices.

Exercice 11.

Résolvez les inéquations suivantes.

1. $2x > 7x - 1$
2. $-4x - 10 \geq 2 - 4x$
3. $2x^2 < 2(x-7)^2$
4. $x^2 < 25$
5. $(x+3)^2 < -1$
6. $(x-6)^2 > 16$
7. $(2x - \sqrt{3})(2x + 6) > 0$
8. $\frac{36-12x}{x-3} \leq 0$
9. $x^2 - 5 < (x + \sqrt{5})(x - 2)$
10. $x^2 - 25 + (x-5)(6-x) \leq 0$

Exercice 12.

1. Résolvez l'inéquation $\frac{2x+3}{x-1} \geq 4$.
2. Comment vérifier graphiquement ce résultat ?

Exercice 13.

Une entreprise fabrique et vend de la pâte à papier. Le coût de production de q tonnes de pâte à papier est donné, en milliers d'euros par

$$C(q) = 0,02q^2 + 0,1q + 9$$

pour $q \in [0; 80]$.

La recette, en milliers d'euros, engendrée par la vente de q tonnes de pâte à papier est donnée par

$$R(q) = 1,2q$$

1. (a) Quel est le coût de fabrication d'une tonne de pâte à papier ?
 (b) Quel est le prix de vente d'une tonne de pâte à papier ?
 (c) L'entreprise est-elle bénéficiaire lorsqu'elle vend et produit une tonne de pâte à papier ?
2. Avec la calculatrice conjecturez pour quelles quantités de pâte à papier l'entreprise est bénéficiaire.
3. Démontrez que le bénéfice, en milliers d'euros, réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend q tonnes de pâte à papier est

$$B(q) = -0,02q^2 + 1,1q - 9$$

4. Démontrez que $B(q) = -0,02(q - 45)(q - 10)$ quelque soit $q \in [0; 80]$.
5. Déterminez pour quelles quantités de pâte à papier l'entreprise est bénéficiaire.

Exercice 14.

Une entreprise fabrique un produit. Pour une période donnée, le coût total de production, en euros, est donné en fonction du nombre q d'articles fabriqués par : $C(q) = 2q^2 + 10q + 900$ pour $0 < q < 80$.

Tous les articles fabriqués sont vendus, la recette totale en euros est donnée par $R(q) = 120q$.

1. Vérifiez que le bénéfice total est donné par $B(q) = -2(q^2 - 55q + 450)$.
 Puis que la forme factorisée de $B(q)$ est : $B(q) = -2(q - 10)(q - 45)$.
2. Pour quels nombres d'articles produit la production est-elle rentable ?

Exercice 15.

Une entreprise fabrique et vend un produit. On note $f(x)$ le coût de production, exprimé en milliers d'euros, de x tonnes de ce produit.

Pour $0 \leq x \leq 11$, des études ont montré que : $f(x) = x^3 - 12x^2 + 50x$.

L'entreprise vend son produit 30 000 € la tonne. On note $g(x)$ la recette exprimée en milliers d'euros et $B(x)$ le bénéfice : $B(x) = g(x) - f(x)$.

1. Exprimez $g(x)$ en fonction de x .
2. Développez, réduisez et ordonnez $B(x)$.
3. Développez, réduisez et ordonnez $(x - 2)(x - 10)$.
4. Résolvez l'inéquation $B(x) > 0$.
5. Interprétez le résultat de la question précédente.

Exercice 16.

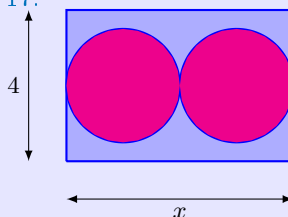
Soient f et g des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 \text{ et } g(x) = 2x + 1$$

1. Vérifiez que pour tout réel x , $f(x) - g(x) = (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$.
2. Résolvez l'inéquation $f(x) < g(x)$.

Exercice 17.

Soit un réel x dans $[0; 8]$. On considère un rectangle de dimension 4 cm sur x cm, dans lequel on trace deux disques de même rayon comme sur la figure ci-contre.



On souhaite déterminer les valeurs de x de façon que l'aire bleue (ce qu'il reste du rectangle) soit supérieure à l'aire rose (les deux disques).

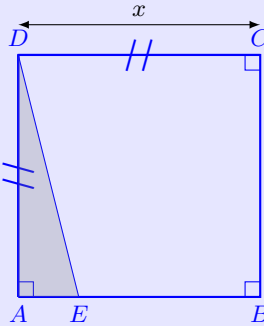
1. Montrez que le problème se ramène à la résolution de l'inéquation $\frac{\pi x^2}{8} \leq 2x$ sur $[0; 8]$.
2. Montrez que l'ensemble des solutions est $\left[0; \frac{16}{\pi}\right]$.

Exercice 18.

$ABCD$ est un carré de côté x , exprimé en cm, avec $x > 6$. E est le point du segment $[AB]$ tel que

$$EB = 6 \text{ cm}$$

1. Exprimez en fonction de x , l'aire en cm^2 du triangle AED .
2. Peut-on trouver x pour que l'aire du carré $ABCD$ soit strictement supérieure au triple de l'aire du triangle AED ?



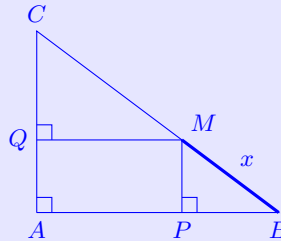
Exercice 19.

ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AB = 8$ et $AC = 6$. M est un point de l'hypoténuse $[BC]$.

Par M , on trace les perpendiculaires à (AB) et (AC) . Elles coupent $[AB]$ et $[AC]$ respectivement en P et Q .

On pose $BM = x$.

On se propose d'étudier quelques propriétés du périmètre du rectangle $APMQ$.

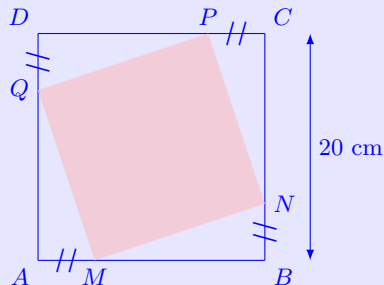


1. Démontrez que $MP = 0,6x$ et $MQ = 8 - 0,8x$.
2. Exprimez, en fonction de x , le périmètre $p(x)$ du rectangle $APMQ$.
3. Pour quelles positions de M le périmètre est-il supérieur ou égale à 13,5?
4. Comparez le périmètre de $AMPQ$ au demi-périmètre du triangle ABC .

Exercice 20.

Dans un carré $ABCD$ de côté 20 cm, on inscrit un carré $MNPQ$ suivant le schéma ci-contre.

On pose $x = AM = BN = CP = DQ$ avec $0 \leq x \leq 20$.



Le but de cet exercice est de déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire du carré $MNPQ$ dépasse 272 cm^2 .

1. Exprimez l'aire en cm^2 , $g(x)$ du carré $MNPQ$ en fonction de x , sous forme développée, ordonnée et réduite.
2. Prouvez que $g(x) > 272$ équivaut à

$$2x^2 - 40x + 128 > 0.$$

3. On note $f(x) = 2x^2 - 40x + 128$. Affichez sur votre calculatrice la courbe représentative de f , tracez à main levée la courbe observée puis conjecturez les solutions du problème.

Pour la fenêtre on utilisera les paramètres d'affichages suivants.

Axe des abscisses : $0 \leq x \leq 20$.

Axe des ordonnées : $-100 \leq y \leq 200$.

4. On se propose de retrouver le résultat par le calcul.

- (a) Vérifiez que $f(x) = (8 - 2x)(16 - 2x)$.
- (b) Étudiez le signe de $f(x)$.
- (c) Déduisez-en les solutions du problème.