

Systèmes linéaires.

Nous nous intéresserons uniquement à des systèmes simples : deux équations et deux inconnues.

Intersection des droites.

Exemples.

1. Détermination de la position relative des deux droites $d : y = 2x + 1$ et $d' : x = 3$ en précisant l'éventuel point d'intersection.
D'après son équation réduite d' est parallèle à l'axe des ordonnées ce qui n'est pas le cas de d (d'après son équation réduite) donc d et d' sont sécantes en un point P .
D'après l'équation de d' l'abscisse de P est 3. Et puisque $P \in d$ ses coordonnées vérifient : $y_P = 2x_P + 1$. En substituant x_P par la valeur trouvée : $y_P = 2 \times 3 + 1 = 7$. Ainsi : $P(3; 7)$.

2. Détermination de la position relative des deux droites $d : y = 2x + 1$ et $d' : y = -5x + 3$ en précisant l'éventuel point d'intersection.
Les coefficients directeurs (pentes) de d et d' sont distincts donc d et d' sont sécantes en un point P .

Les coordonnées de P vérifient simultanément les deux équations de droites :
$$\begin{cases} y_P = 2x_P + 1 \\ y_P = -5x_P + 3 \end{cases}$$

On en déduit l'égalité : $2x_P + 1 = -5x_P + 3$ qui se résout en $x_P = \frac{2}{7}$. En substituant x_P dans (par exemple) l'équation de $d : y_P = 2 \times \frac{2}{7} + 1 = \frac{11}{7}$. Ainsi : $P\left(\frac{2}{7}, \frac{11}{7}\right)$.

3. Détermination de la position relative des deux droites $d : 2x - y + 1 = 0$ et $d' : 3x + 2y - 1 = 0$ en précisant l'éventuel point d'intersection.

$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs respectifs de d et d' . $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 2 \times (-2) = 7 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et par conséquent d et d' sont sécantes en un point P .

On pourrait déterminer les équations réduites des deux droites (ce n'est pas très compliqué) puis procéder comme dans l'exemple précédent. Nous allons procéder un peu différemment (mais sans que ce soit préférentiel).

Isolons l'une des inconnues dans l'une des équations ; le y dans l'équation de d semble tout indiqué : $y = 2x + 1$. Puis substituant au y de l'autre équation cette expression il apparaît : $3x + 2(2x + 1) - 1 = 0$. Nous avons obtenu une équation du premier degré avec une inconnue : $x = -\frac{1}{7}$. Puis en substituant cette valeur de x dans l'expression de $y : y = 2 \times \left(-\frac{1}{7}\right) + 1 = \frac{5}{7}$.

EXERCICE 1. Recherchez les positions relatives et les éventuels points d'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ dont les équations dans un repère (O, I, J) du plan sont :

1. $\mathcal{D}_1 : y = -1x + 2$ et $\mathcal{D}_2 : y = 3x - 1$
2. $\mathcal{D}_1 : y = \frac{10}{2}x - 3$ et $\mathcal{D}_2 : y = 5x - \frac{27}{9}$
3. $\mathcal{D}_1 : y = \pi^2 x - \sqrt{2}$ et $\mathcal{D}_2 : y = \pi^2 x + \frac{7}{4}$
4. $\mathcal{D}_1 : y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$ et $\mathcal{D}_2 : y = -x + \frac{\pi}{2}$
5. $\mathcal{D}_1 : x = \sqrt{2}$ et $\mathcal{D}_2 : y = \sqrt{2}x - 2$
6. $\mathcal{D}_1 : x = -\pi^2 + 4$ et $\mathcal{D}_2 : x = 4^{1000}$

Généralités.

Un **système d'équations** est un groupe d'équations utilisant les mêmes inconnues. Résoudre un système d'équations c'est trouver toutes les solutions qui satisfont simultanément *toutes* les équations.

Nous résoudrons quasi uniquement des **systèmes d'équations linéaires (ou affines) de deux équations à deux inconnues**

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

où x et y sont des inconnues (ou variables) et a_1, b_1, a_2, b_2 des nombres réels fixés.

Les solutions d'un tel système sont des couples (une valeur pour x et une valeur pour y). Un tel système peut n'avoir aucune, une seule (*i.e.* un couple) ou une infinité de solutions.

EXERCICE 2. Par un raisonnement géométrique donnez le nombre de solutions des systèmes d'équations suivants.

$$\text{a) } (S_1) \begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -5x + 6 \end{cases}, \quad \text{b) } (S_2) \begin{cases} y = -3x + 1 \\ y = -3x + \pi \end{cases}, \quad \text{c) } (S_3) \begin{cases} y = 2x + 5 \\ 2y = 4x + 10 \end{cases}$$

Exercice 2.

- Sécantes au point de coordonnées $(\frac{5}{7}, \frac{17}{7})$. Le système a une seule solution : singleton.
- Strictement parallèles : $(0,1)$ est solution de la première équation mais pas de la seconde. Aucune solution : ensemble vide.
- En écrivant la seconde équation comme une équation réduite nous voyons que nous avons une seule équation : droites confondues. Une infinité de couples solutions : les coordonnées des points de la droite.

EXERCICE 3. Par un raisonnement géométrique donnez le nombre de solution du système d'équations suivants.

$$(S) : \begin{cases} 3x + 4y - 1 = 0 \\ -2x - \frac{8}{3}y - 17 = 0 \end{cases}$$

Exercice 3. $\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 8/3 \\ -2 \end{pmatrix}$. $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} -4 & 8/3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 \times (-2) - 3 \times \frac{8}{3} = 0$.

Résolution par substitution.

Dans le cas particulier d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues nous utiliserons la méthode par substitution.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$$

Méthode de résolution :

Étape 1 isoler x dans la première équation (1) et l'exprimer en fonction de y ,

Étape 2 substituer à x son expression en fonction de y dans l'équation (2),

Étape 3 résoudre l'équation du premier degré d'inconnue y ainsi obtenue.

- si l'équation d'inconnue y admet une solution en réinjectant cette valeur dans l'expression de x obtenue à l'étape 2 nous obtenons la valeur de y ,
- si nous ne trouvons pas de solution pour y alors le système n'admet pas de solutions.
- si nous trouvons une infinité de valeurs ($\mathbb{R}$) pour y , alors une infinité de couple est solution.
- conclure après avoir calculer la valeur de y .

Exemples.

1.

EXERCICE 4. Résolvez les systèmes :

$$(S_1) : \begin{cases} 9x + 3y = 2 \\ -2x + y = 1 \end{cases}, (S_2) : \begin{cases} 2x + 8y = 12 \\ \frac{1}{2}x + 2y = 3 \end{cases}, (S_3) : \begin{cases} y - 3x = 2 \\ -6x + 2y = 14 \end{cases}$$

Exercice 4.

Réolvons (S_1) .

Notons

$$(S_1) \begin{cases} 9x + 3y = 2 & (E_1) \\ -2x + y = 1 & (E_2) \end{cases}$$

Étape 1. Isolons y dans (E_2) .

$$\begin{aligned} (E_2) &\Leftrightarrow -2x + y + 2x = 1 + 2x \\ &\Leftrightarrow y = 2x + 1 \end{aligned}$$

Étape 2. Substituons à y son expression en fonction de x dans (E_1) .

$$(E_1) \Rightarrow 9x + 3(2x + 1) = 2$$

Développons, ordonnons puis réduisons

$$\begin{aligned} (E_1) &\Rightarrow 9x + 3 \times 2x + 3 \times 1 = 2 \\ &\Rightarrow 9x + 6x + 3 = 2 \\ &\Rightarrow 15x + 3 = 2 \end{aligned}$$

Étape 3. Résolvons cette équation linéaire de degré un en isolant l'inconnue x .

$$\begin{aligned} 15x + 3 = 2 &\Leftrightarrow 15x + 3 - 3 = 2 - 3 \\ &\Leftrightarrow 15x = -1 \\ &\Leftrightarrow \frac{15x}{15} = \frac{-1}{15} \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{15} \end{aligned}$$

Étape 4. Calculons y .

Remplaçons x par la valeur numérique trouvée précédemment.

$$\begin{aligned} -2\left(-\frac{1}{15}\right) + y = 1 &\Leftrightarrow \frac{2}{15} + y = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{15} + y - \frac{2}{15} = 1 - \frac{2}{15} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{13}{15} \end{aligned}$$

Étape 5. Nous n'avons pas raisonné par équivalence mais par implication. Nous avons que s'il y a une solution ce ne peut-être que le couple précédent. Il faudrait maintenant vérifier que ce couple est effectivement solution des deux équations.

$$\text{L'ensemble des solutions de } (S_1) \text{ est } \mathcal{S} = \left\{ \left(-\frac{1}{15}; \frac{13}{15} \right) \right\}.$$

Une substitution simple : système échelonné.

Pour mieux comprendre l'intérêt de ce procédé nous allons le voir sur un plus gros système d'équations linéaires.

Nous dirons qu'un système est *échelonné* si chaque ligne contient une inconnue de moins.

Exemples.

1. Un système échelonné :
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -y = 2 \end{cases}$$
2. Un système qui n'est pas échelonné :
$$\begin{cases} -x - 7y = -1 \\ 6x + 2y = 10 \end{cases}$$
3. Un système échelonné :
$$\begin{cases} 3x + 4y - 5z = 6 \\ 2y + z = -11 \\ 5z = 2 \end{cases}$$

La résolution se fait en procédant à des substitutions en remontant les équations du système.

Exemples.

1. Résolvons le système
$$\begin{cases} 3x + 4y - 5z = 16 \\ 2y + z = 8 \\ 3z = 6 \end{cases}$$

On commence par la dernière équation.

* $3z = 6 \Leftrightarrow z = 2.$

* Puis on substitue dans l'équation précédente du système : $2y + 2 = 8 \Leftrightarrow y = 3.$

* Puis on substitue dans l'équation précédente du système : $3x + 4 \times 3 - 5 \times 2 = 14 \Leftrightarrow x = 4.$

Le système admet une unique solution : le triplet (4; 3; 2).

Résolution par combinaisons linéaires.

Cette méthode, qui est la plus générale (ou du moins qui se généralise le plus facilement), est aussi la plus abstraite.

Proposition 1. Les règles de calculs sur les équations d'un système qui conservent les systèmes équivalents sont :

- (i) multiplier une équation par un nombre réel non nul,
- (ii) remplacer une équation par la somme des deux autres équations,
- (iii) échanger deux équations.

Remarques.

1. Ces règles complètent les règles vues pour manipuler une équation.
2. Grâce à ces règles de calculs il est possible d'isoler les inconnues et de résoudre le système d'équations linéaires du premier degré.
3. Les deux règles précédentes sont parfois regroupées en disant que les *combinaisons linéaires* sur les lignes sont autorisées.
4. Ces règles sont aisées à programmer et permettent de rédiger un algorithme de résolution de système appelé *méthode du pivot de Gauss* ou *élimination de Gauss-Jordan*.

Exemples.

1. On souhaite résoudre le système avec l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{cases} 4x & - & 2y & = & 24 \\ 2x & + & 4y & = & 2 \end{cases}$$

Transformer les équations pour avoir le coefficient de x égale à 1. On dit que x est le pivot.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}L_1 &\rightarrow L_1 & \begin{cases} x & - & \frac{1}{2}y & = & 6 \\ x & + & 2y & = & 1 \end{cases} \\ \frac{1}{2}L_2 &\rightarrow L_2 \end{aligned}$$

On supprime le pivot de la seconde équation.

$$\begin{aligned} L_2 - L_1 &\rightarrow L_2 & \begin{cases} x & - & \frac{1}{2}y & = & 6 \\ & 2y + \frac{1}{2}y & = & 1 - 6 \end{cases} \\ & & \begin{cases} x & - & \frac{1}{2}y & = & 6 \\ & \frac{5}{2}y & = & -5 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{5}L_2 &\rightarrow L_2 & \begin{cases} x & - & \frac{1}{2}y & = & 6 \\ & \frac{2}{5} \times \frac{5}{2}y & = & \frac{2}{5} \times (-5) \end{cases} \\ & & \begin{cases} x & - & \frac{1}{2}y & = & 6 \\ & y & = & -2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}L_2 + L_1 &\rightarrow L_1 & \begin{cases} x & - & \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y & = & 6 + \frac{1}{2} \times (-2) \\ & y & = & -2 \end{cases} \\ & & \begin{cases} x & & & = & 5 \\ & y & = & -2 \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions du système est donc : $\mathcal{S} = \{(5, -2)\}$.

2. On souhaite résoudre le même système toujours avec des combinaisons linéaires mais sans suivre d'algorithme particulier.

$$L_1 - 2L_2 \rightarrow L_1 \quad \begin{cases} & - & 10y & = & 20 \\ 2x & + & 4y & = & 2 \end{cases}$$

$$-\frac{1}{10}L_1 \rightarrow L_1 \quad \begin{cases} & y & = & -2 \\ 2x & + & 4y & = & 2 \end{cases}$$

$$L_2 - 4L_1 \rightarrow L_2 \quad \begin{cases} & y & = & -2 \\ 2x & & = & 10 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}L_2 \rightarrow L_2 \quad \begin{cases} & y & = & -2 \\ x & & = & 5 \end{cases}$$

EXERCICE 5. Résolvez les systèmes :

$$(S_1) : \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}, (S_2) : \begin{cases} -x + 3y = 19 \\ 4x - y = 1 \end{cases}, (S_3) : \begin{cases} 5x + 2y = 12 \\ -3x + 4y = -2 \end{cases}$$

Exercice 5. Résolvons le système (S_1) .

Le système (S_1) équivaut successivement à :

$$\frac{1}{3}L_1 \rightarrow L_1 \quad \begin{cases} x & + & \frac{2}{3}y & = & \frac{2}{3} \\ x & + & y & = & 1 \end{cases}$$

Nous avons utilisé la propriété (i) de la proposition ci-dessus.

$$L_2 - L_1 \rightarrow L_2 \quad \begin{cases} x & + & \frac{2}{3}y & = & \frac{2}{3} \\ & \frac{1}{3}y & = & \frac{1}{3} \end{cases}$$

Nous avons utilisé la propriété (ii) de la proposition ci-dessus.

$$3L_2 \rightarrow L_2 \quad \begin{cases} x + \frac{2}{3}y = \frac{2}{3} \\ y = 1 \end{cases}$$

Nous avons utilisé la propriété (i) de la proposition ci-dessus.

$$L_1 - \frac{2}{3}L_1 \rightarrow L_1 \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Nous avons utilisé les propriétés (i) et (ii) de la proposition ci-dessus combinées.

L'ensemble des solutions de (S_1) est donc : $\mathcal{S} = \{(0,1)\}$.

Exercices.

EXERCICE 6. Résolvez les systèmes par substitution.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} x - 3y = 8 \\ 2x + 5y = 5 \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} 8x + y = 111 \\ 14x - 9y = 33 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b) } \begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ 5x + y = -6 \end{cases} \\ \text{d) } \begin{cases} 0,2x + 0,7y = 0,5 \\ x + 2y = 1,6 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 6.

a) Résolvons le système.

$$\begin{cases} x - 3y = 8 & (1) \\ 2x + 5y = 5 & (2) \end{cases}$$

*

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow x - 3y + 3y = 8 + 3y \\ &\Leftrightarrow x = 8 + 3y \end{aligned}$$

* En substituant dans (2) :

$$\begin{aligned} 2(8 + 3y) + 5y &= 5 \Leftrightarrow 2 \times 8 + 2 \times 3y + 5y = 5 \\ &\Leftrightarrow 16 + 6y + 5y = 5 \\ &\Leftrightarrow 11y + 16 = 5 \\ &\Leftrightarrow 11y + 16 - 16 = 5 - 16 \\ &\Leftrightarrow 11y = -11 \\ &\Leftrightarrow \frac{11y}{11} = \frac{-11}{11} \\ &\Leftrightarrow y = -1 \end{aligned}$$

* En remplaçant dans (1), y par la valeur numérique trouvée :

$$\begin{aligned} x - 3(-1) &= 8 \Leftrightarrow x + 3 = 8 \\ &\Leftrightarrow x + 3 - 3 = 8 - 3 \\ &\Leftrightarrow x = 5 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions du système est $\mathcal{S} = \{(5, -1)\}$.

- b) Une unique solution : $(-2; 4)$.
 c) $(12; 15)$.
 d) $(\frac{2}{5}; \frac{3}{5})$.

EXERCICE 7. Résolvez les systèmes en utilisant des combinaisons linéaires.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} 3x + 5y = 31 \\ 5x + 4y = 43 \end{cases} \\ \text{c)} \quad & \begin{cases} 7x + 4y = 1 \\ 3x + 5y = 7 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \begin{cases} 8x - 5y = -6 \\ 4x + 2y = 24 \end{cases} \\ \text{d)} \quad & \begin{cases} -3x + 4y = 56 \\ 2x + 4y = 36 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 7.

- a) $(7; 2)$.
 b) Résolvons le système proposé.

$$\begin{cases} 8x - 5y = -6 \\ 4x + 2y = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x - 5y = -6 \\ 8x + 4y = 48 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow 2L_2$$

$$\begin{cases} 8x - 5y = -6 \\ 9y = 54 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\begin{cases} 8x - 5y = -6 \\ y = 6 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{9}L_2$$

$$\begin{cases} 8x = 24 \\ y = 6 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 + 5L_2$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -6 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow \frac{1}{8}L_2$$

Le système admet une unique solution $(3; -6)$.

- c) $(-1; 2)$.
 d) $(-4; 11)$.

EXERCICE 8. Dans chacun des cas suivants, calculez les nombres réels a et b afin que le couple donné soit solution du système.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 5x + by = -14 \end{cases} \quad \text{a pour solution } (2, a). \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} ax + 2y = 1 \\ 3x + by = -1 \end{cases} \quad \text{a pour solution } (5, -2). \end{aligned}$$

Exercice 8.

- a) $a = -3$ et $b = 8$.
 b) $a = 1$ et $b = 8$.

EXERCICE 9. La droite d passe par les points : $M(-2; 6)$ et $N(2; 18)$.

- Pourquoi (MN) admet-elle une équation réduite de la forme $y = mx + p$?
- Justifiez qu'on a le système : $\begin{cases} -2m + p = 6 \\ 2m + p = 18 \end{cases}$.
- (a) Résolvez le système.
 (b) Le point $P(-10, -18)$ est-il sur d ? Justifier.

Exercice 9.

- Car M et N ont des abscisses distinctes.
- La première équation signifie que M appartient à d et la seconde signifie que N appartient à d .
- (a) $m = 3$ et $p = 12$.
(b) $m \times (-10) + p = 3 \times (-10) + 12 = -18$ donc $P \in d$.

EXERCICE 10. Exercices 111 à 123 page 197 du manuel Indice : résolution de systèmes.

EXERCICE 11. *Problème longtemps : le vigneron (1900).*

Un vigneron qui venait d'acheter un pré disait : « Si je vends mon vin 160 F la pièce, j'aurai de quoi payer mon pré et il me restera 800 F ; si je le vends 140 F comme on me le propose, il me manquera 300 F. »

On demande le nombre de pièces de vin et le prix du pré.

EXERCICE 12.

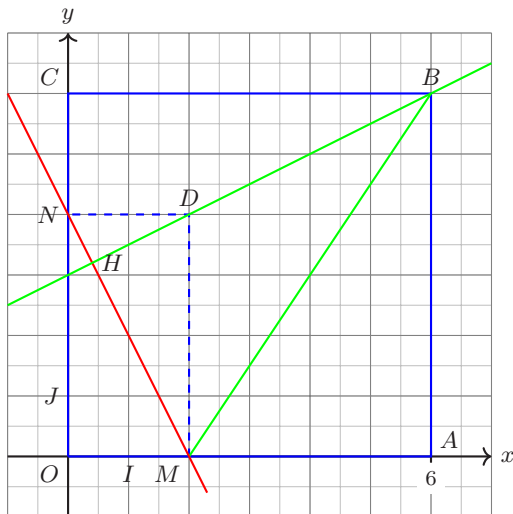
Dans un repère orthonormé (O, I, J) on donne les points $A(6; 0)$, et $M(2; 0)$.

$OABC$ est un carré.

$OM = CN$ et $OMDN$ est un rectangle.

Les droites (BD) et (MN) se coupent en H .

Le but de l'exercice est de démontrer que le triangle BHM est rectangle en H .



- Quelles sont les coordonnées des points B , N et D ?
- (a) Quelles sont les équations des droites (MN) et (BD) ?
(b) Déduisez-en les coordonnées de H .
- Démontrez que le triangle MBH est rectangle.

EXERCICE 13. Soit MNP un triangle quelconque. On se place dans le repère (M, N, P) et on note U le milieu de $[MP]$.

- Placez le point K , symétrique du point M par rapport au point N . Quelles sont ses coordonnées ?
- Tracez la droite (d) d'équation $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.
- Résolvez le système d'équations $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \\ y = 1 - x \end{cases}$
- Interprétez la solution de ce système.
- On note $L(\frac{2}{3}; \frac{1}{3})$. Montrez que la droite (ML) coupe le segment $[PK]$ en son milieu.
- Pourquoi ce résultat était-il prévisible ?

EXERCICE 14. Dans un repère orthonormé (O, I, J) , on donne les points $A(-4; 3)$, $B(8; 1)$ et $C(1; 4)$.

Partie A : médiatrices d'un triangle.

- On note m_1 la médiatrice de $[BC]$. Soit $M(x, y)$ un point quelconque sur m_1 . On rappelle que la médiatrice est constituée des points équidistants des extrémités de ce segment.
 - Exprimer BM^2 et CM^2 en fonction de x et y .
 - Montrez qu'un point $M(x, y)$ appartient à la médiatrice m_1 de $[BC]$ si et seulement si : $7x - 3y = 24$.
 - Montrez de la même manière qu'une équation cartésienne de la médiatrice m_2 de $[AC]$ est : $5x + y = -4$.
- Résolvez le système :
$$\begin{cases} 7x & - & 3y & = & 24 \\ 5x & + & y & = & -4 \end{cases}$$
 - Déduisez-en, les coordonnées du centre E du cercle circonscrit au triangle ABC .

Partie B : hauteurs d'un triangle.

- Soit h_1 la hauteur issue de A du triangle ABC .
 - Démontrez que m_1 et h_1 sont parallèles.
 - Déterminez une équation cartésienne de h_1 .
- Soit h_2 la hauteur issue de B du triangle ABC . Déterminez une équation cartésienne de h_2 .
- Déterminez les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC .

EXERCICE 15. Un terrain a pour longueur 50 mètres et pour largeur 30 mètres. Le propriétaire augmente la largeur de x mètres et la longueur de y mètres. Il obtient alors un terrain carré dont le périmètre est égale à 500 mètres. Calculez x et y .

EXERCICE 16. Soient $A(2; 2)$, $B(4; 4)$, $C(7; 2)$ et $D(4; -2)$.

- Montrez que la droite d_1 passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$ et la droite d_2 passant par D et de vecteur directeur $\overrightarrow{AC}$ sont sécantes en un point P .
- Calculez les coordonnées du point P .

EXERCICE 17. Un magasin vend des coques de téléphone et des stylos. En septembre la recette pour la vente de 350 coques et 700 stylos a été de 4900 €. Le bénéfice du vendeur est de 40 % du prix pour chaque coque et 60 % du prix pour chaque stylo. Le vendeur a réalisé en septembre un bénéfice de 2380 €. À l'aide d'un système déterminez le prix d'une coque de téléphone et le prix d'un stylo.

EXERCICE 18. À la boulangerie, Tom achète deux croissants et quatre pains au chocolat pour 6,90 €. Dans la même boulangerie, Rose paie 4,10 € pour un pain au chocolat et trois croissants. Gaëlle veut acheter neuf croissants et sept pains au chocolat dans cette boulangerie. Combien va-t-elle devoir payer ?

EXERCICE 19. Exercices 130 à 150 page 198 à 200 du manuel Indice : position relative de droites.

EXERCICE 20.

EXERCICE 21. Exercice 38 page 235 (Sesamath). Déterminer la position relative de deux droites à partir des coordonnées de deux points de l'une et de l'équation de l'autre.

EXERCICE 22. Exercice 43 page 236 (Sesamath). Parallélisme et mise en équation.

EXERCICE 23. Exercices 50 et 51 page 236 (Sesamath). Détermination du nombre de solutions d'un système puis résolution.

EXERCICE 24. Exercices 124 à 129 page 198 du manuel Indice : des problèmes variés.

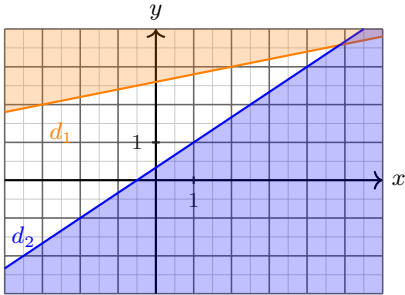
Partition du plan avec des droites.

On parle parfois de *régionnement affines du plan*.

EXERCICE 25. **Partie A.** On considère la droite d : $2x + 3y = 11$.

- Tracez la droite d dans un repère.
- On considère l'ensemble E des points $M(x,y)$ tels que $2x + 3y < 11$.
 - Montrer que l'origine du repère est dans E .
 - Parmi les points suivants, quels sont ceux qui appartiennent à l'ensemble E ? Justifiez par un calcul. $A(2;1)$, $B(1;4)$, $C(5;0)$ et $D(4;1)$.
 - Graphiquement, où sont situés les points qui appartiennent à l'ensemble E ?

Partie B. Ci-dessous on a représenté deux droites : $d_1 : x - 5y + 13 = 0$ et $d_2 : 2x - 3y + 1 = 0$.



Décrivez l'ensemble non coloré par un système de deux inéquations à deux inconnues x et y . (Une droite en pointillés correspond à une inégalité stricte.)

EXERCICE 26. On considère l'ensemble F des points $M(x,y)$ du plan vérifiant :

$$\begin{cases} x > 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \\ 3x - 5y + 4 > 0 \end{cases}$$

- Les points $A(1;2)$ et $B(3;2)$ appartiennent-ils à F ?
- Tracez les droites $d_1 : x = 0$, $d_2 : x - y - 1 = 0$ et $d_3 : 3x - 5y + 4 = 0$.
 - Hachurez les parties du plan qui ne vérifient pas les inéquations de l'ensemble F .
 - Décrivez l'ensemble F .
- Combien de points à coordonnées entières sont dans l'ensemble F ? Lesquels?