Inéquation produit.

I Étude du signe d'une fonction factorisée.

Pour étudier le signe d'une fonction factorisée il faut étudier le signe de chaque facteur en regroupant les résultats dans un unique tableau de signe. ♡

Exercice 1

Étudiez le signe de la fonction f définie sur $[-10; 10]$ par, pour tout $x \in [-10; 10]$

$$f(x) = (3x-7)x^2(-x+1)$$

Remarques.

1. Pour vérifier ou conjecturer le tableau de signe il est possible de faire une lecture graphique sur la calculatrice.

Exercice 2

Étudiez le signe de $g : \left\{ \begin{array}{rcl} [-6; 4] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x+4)(-x+2) \end{array} \right.$

II Résolution d'inéquations.

Inéquation produit.

Résoudre une inéquation produit revient à étudier le signe de la fonction associée.

Exercice 3

Résolvez l'inéquation $-2(x+1)(-7-x) \geq 0$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4 pour s'entraîner.

1. $(x-5)(-2x+6) \geq 0$
2. $(3x-5)(x+4) > 0$
3. $(x+3)(-x+6) \leq 0$
4. $(-x+4)(3x+2) > 0$
5. $(10x+5)(-3x+4) > 0$
6. $(x-4)(3-x) \leq 0$
7. $(-2x+3)(5+x) > 0$
8. $3x(3x-5) < 0$
9. $-(x+1)^2(2x-1) \geq 0$
10. $-2x(x-1)(4-x) \leq 0$
11. $x^2(4-x)(-2x+1) > 0$
12. $x^3(x+1) < 0$
13. $(x^2+1)(x-1) \geq 0$
14. $(x-2)(4-x) < 0$
15. $\left(\frac{3}{4}-x\right)\left(x-\frac{7}{6}\right) \geq 0$
16. $(x+\sqrt{3})(x-4) \geq 0$
17. $(3x-7)(7-3x) \leq 0$

Inéquation se ramenant à une inéquation produit.

Pour résoudre une inéquation qui n'est pas linaire du premier degré nous essaierons de nous ramener à une inéquation produit.

Exercice 5

Justifiez que les inéquations suivantes sont équivalentes

$$(2x-4)(x+5)+x>-5 \text{ et } (2x-3)(x+5)>0$$

puis résolvez l'inéquation $(2x-4)(x+5)+x>-5$.

Exercice 6

Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 \leq 16$.

Exercice 7 pour s'entraîner.

Résolvez les inéquation suivantes dans l'ensemble des réels.

1. $x^2-4x \leq -2x-1$
2. $3x(x+3)-(x+3)^2 \leq 0$
3. $x^3+2x^2+x \geq 0$
4. $x(x+6) > 3(x+6)$
5. $2x(x-3)+3x-9 < 6x-18$
6. $x^2(1-3x)+4(6x-2) \geq 0$
7. $(1-2x)x-4x(x+6) \leq 0$
8. $7-x^2 < 2x-2\sqrt{7}$
9. $(x^2-1)+2x-2 > 6x-6$
10. $x^2 \leq 10$
11. $x^2 \leq -16$
12. $x^2 \leq 0$
13. $x^2 < 8$
14. $x^2 \leq 144$
15. $x^2 \leq 20$
16. $x^2-4+(x+2)(2x+5) < 0$
17. $(x+1)(x-3) \geq x^2-9$
18. $4x-4+(x-1)(x-4)+x^2-1 > 0$
19. $(x+5)^2 \leq (x+5)(x+3)$
20. $(2x-1)(x+3) \geq \left(x-\frac{1}{2}\right)(x+6)$

Inéquation quotient.

Pour étudier le signe d'un quotient nous étudions le signe du numérateur puis du dénominateur et nous utilisons la même règle que pour le signe d'un produit. Il faut cependant rester vigilant et exclure les valeurs interdites.

Exercice 8

Résolvez l'inéquation $\frac{-x+1}{-2x+8} > 0$.

Exercice 9 pour s'entraîner.

Résolvez les inéquations dans $\mathbb{R}$.

1. $\frac{2x-4}{x+2} \leq 0$
2. $\frac{-2x+8}{3x-2} \leq 0$
3. $\frac{2x+4}{x-1} - 2 \geq 0$
4. $\frac{2x+4}{x+1} < 3$
5. $\frac{2x+3}{x+1} \leq \frac{x-6}{x+1}$
6. $1 < \frac{2x+10}{-x+3}$
7. $\frac{x+3}{2x-1} \geq 0$
8. $\frac{2-x}{5-2x} \leq 0$
9. $\frac{3x-1}{-x+5} > 0$
10. $\frac{5x(x-2)}{4x+1} < 0$
11. $\frac{2x^2}{(-x+1)(x+3)} \geq$
12. $\frac{-x(x-4)}{2+x^2} \leq 0$
13. $\frac{(x+1)(x-2)}{3-x} > 0$
14. $\frac{9-4x}{11-5x} < 0$
15. $\frac{-5+4x}{2x-1} \geq 0$
16. $\frac{x+1}{3-x} \leq 0$
17. $\frac{7-2x}{2x-1} > 0$
18. $\frac{-5x}{(2x-7)^2} < 0$
19. $\frac{1+2x^2}{7-x} \geq 0$
20. $\frac{x+4}{5-x} < 2$

III Exercices.

Exercice 10

Résolvez les inéquations suivantes.

1. $2x > 7x - 1$
2. $-4x - 10 \geq 2 - 4x$
3. $2x^2 < 2(x-7)^2$
4. $x^2 < 25$
5. $(x+3)^2 < -1$
6. $(x-6)^2 > 16$
7. $(2x - \sqrt{3})(2x+6) > 0$
8. $\frac{36-12x}{x-3} \leq 0$
9. $x^2 - 5 < (x+\sqrt{5})(x-2)$
10. $x^2 - 25 + (x-5)(6-x) \leq 0$

Exercice 11 pour s'entraîner.

1. Résolvez l'inéquation $\frac{2x+3}{x-1} \geq 4$.
2. Comment vérifier graphiquement ce résultat ?

Exercice 12 ★

Étudiez les positions relatives (au-dessus ou au-dessous) des courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$.

Exercice 13

Une entreprise fabrique et vend de la pâte à papier. Le coût de production de q tonnes de pâte à papier est donné, en milliers d'euros par

$$C(q) = 0{,}02q^2 + 0{,}1q + 9$$

pour $q \in [0; 80]$.

La recette, en milliers d'euros, engendrée par la vente de q tonnes de pâte à papier est donnée par

$$R(q) = 1{,}2q$$

1. (a) Quel est le coût le fabrication d'une tonne de pâte à papier ?
   (b) Quel est prix de vente d'une tonne de pâte à papier ?
   (c) L'entreprise est-elle bénéficiaire lorsqu'elle vend et produit une tonne de pâte à papier ?
2. Avec la calculatrice conjecturez pour quelles quantités de pâte à papier l'entreprise est bénéficiaire.
3. Démontrez que le bénéfice, en milliers d'euros, réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend q tonnes de pâte à papier est

$$B(q) = -0{,}02q^2 + 1{,}1q - 9$$

4. Démontrez que $B(q) = -0{,}02(q-45)(q-10)$ quelque soit $q \in [0; 80]$.
5. Déterminez pour quelles quantités de pâte à papier l'entreprise est bénéficiaire.

Exercice 14 pour s'entraîner.

Une entreprise fabrique un produit. Pour une période donnée, le coût total de production, en euros, est donné en fonction du nombre q d'articles fabriqués par : $C(q) = 2q^2 + 10q + 900$ pour $0 < q < 80$.

Tous les articles fabriqués sont vendus. la recette totale en euros est donnée par $R(q) = 120q$.

1. Vérifiez que le bénéfice total est donné par $B(q) = -2(q^2 - 55q + 450)$.
   Puis que la forme factorisée de $B(q)$ est : $B(q) = -2(q-10)(q-45)$.
2. Pour quels nombres d'articles produit la production est-elle rentable ?

Exercice 15 pour s'entraîner.

Une entreprise fabrique et vend un produit. On note $f(x)$ le coût de production, exprimé en milliers d'euros, de x tonnes de ce produit.

Pour $0 \leq x \leq 11$, des études ont montré que : $f(x) = x^3 - 12x^2 + 50x$.

L'entreprise vend son produit 30 000 € la tonne. On note $g(x)$ la recette exprimée en milliers d'euros et $B(x)$le bénéfice : $B(x) = g(x) - f(x)$.

1. Exprimez $g(x)$ en fonction de x.
2. Développez, réduisez et ordonnez $B(x)$.
3. Développez, réduisez et ordonnez $(x-2)(x-10)$.
4. Résolvez l'inéquation $B(x) > 0$.
5. Interprétez le résultat de la question précédente.

Exercice 16 pour s'entraîner.

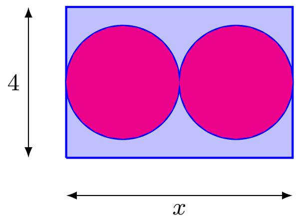
Soient f et g des fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 \text{ et } g(x) = 2x + 1$$

1. Vérifiez que pour tout réel x, $f(x)-g(x)=(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$.
2. Résolvez l'inéquation $f(x)<g(x)$.

Exercice 17

Soit un réel x dans $[0;8]$. On considère un rectangle de dimension 4 cm sur x cm, dans lequel on trace deux disques de même rayon comme sur la figure ci-contre.



On souhaite déterminer les valeurs de x de façon que l'aire bleue (ce qu'il reste du rectangle) soit supérieure à l'aire rose (les deux disques).

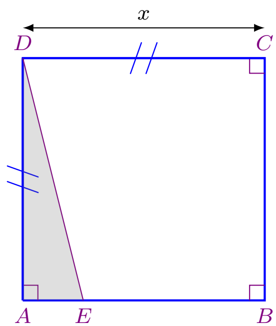
1. Montrez que le problème se ramène à la résolution de l'inéquation $\dfrac{\pi x^2}{8} \leq 2x$ sur $[0;8]$.
2. Montrez que l'ensemble des solutions est $\left[0;\dfrac{16}{\pi}\right[$.

Exercice 18 pour s'entraîner.

$ABCD$ est un carré de côté x, exprimé en cm, avec $x>6$. E est le point du segment $[AB]$ tel que

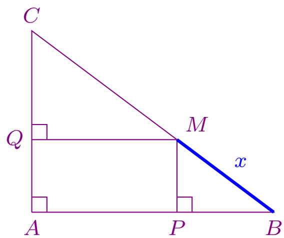
$$EB = 6 \text{ cm}$$

1. Exprimez en fonction de x, l'aire en cm^2 du triangle AED.
2. Peut-on trouver x pour que l'aire du carré $ABCD$ soit strictement supérieure au triple de l'aire du triangle AED ?



Exercice 19 pour s'entraîner.

ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AB=8$ et $AC=6$. M est un point de l'hypoténuse $[BC]$.
Par M, on trace les perpendiculaires à (AB) et (AC). Elles coupent $[AB]$ et $[AC]$ respectivement en P et Q.
On pose $BM=x$.
On se propose d'étudier quelques propriétés du périmètre du rectangle $APMQ$.

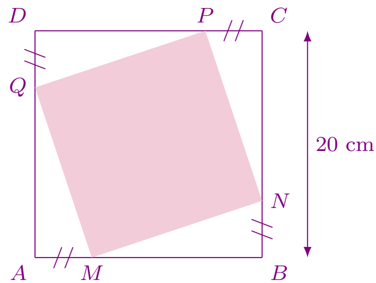


1. Démontrez que $MP = 0{,}6x$ et $MQ = 8 - 0{,}8x$.
2. Exprimez, en fonction de x, le périmètre $p(x)$ du rectangle $APMQ$.
3. Pour quelles positions de M le périmètre est-il supérieur ou égale à 13,5 ?
4. Comparez le périmètre de $AMPQ$ au demi-périmètre du triangle ABC.

Exercice 20 pour s'entraîner.

Dans un carré $ABCD$ de côté 20 cm, on inscrit un carré $MNPQ$ suivant le schéma ci-contre.

On pose $x = AM = BN = CP = DQ$ avec $0 \leq x \leq 20$.



Le but de cet exercice est de déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire du carré $MNPQ$ dépasse 272 cm^2.

1. Exprimez l'aire en cm^2, $g(x)$ du carré $MNPQ$ en fonction de x, sous forme développée, ordonnée et réduite.
2. Prouvez que $g(x) > 272$ équivaut à
$$2x^2 - 40x + 128 > 0.$$
3. On note $f(x) = 2x^2 - 40x + 128$. Affichez sur votre calculatrice la courbe représentative de f, tracez à main levée la courbe observée puis conjecturez les solutions du problème.
Pour la fenêtre on utilisera les paramètres d'affichages suivants.
Axe des abscisses : $0 \leq x \leq 20$.
Axe des ordonnées : $-100 \leq y \leq 200$.
4. On se propose de retrouver le résultat par le calcul.
   (a) Vérifiez que $f(x) = (8 - 2x)(16 - 2x)$.
   (b) Étudiez le signe de $f(x)$.
   (c) Déduisez-en les solutions du problème.