# Équation produit-nul.

Sachant résoudre les équations du premier degré, nous allons étendre cette compétence à des équations plus complexes nous essaieront d'écrire les équations sous forme d'équations produit.

## Généralités sur les équations.

Une *équation* est une égalité dans laquelle se trouvent des lettres (des *inconnues* ou *variables*) qui représentent des nombres (expression littérale).

Une équation est soit vraie, soit fausse, suivant les valeurs choisies pour remplacer les lettres.

Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs qui rendent l'équation vraie.

Exemples.

1. $3x^2 + 2$ n'est pas une équation, c'est une expression littérale.
2. $x = 2$ est une équation (qui est dite résolue en $x$).
3. $y = 2x$ est une équation avec deux inconnues.
4. $3x - 12 = 0$ est une équation de degré 1 (car l'inconnue est à la puissance 1).
5. $x^2 = 16$ est une équation de degré 2.

Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs qui rendent l'équation vraie. Une valeur qui rend une équation vraie est appelée une *solution* de l'équation.

Il n'y a pas une unique méthode de résolution des équations. Il y a presque autant de méthodes que d'équations.

Nous apprendrons certaines de ces méthodes.

Pour simplifier la résolution et pour identifier à quel type d'équation nous avons à faire nous modifierons souvent l'équation de façon à obtenir une égalité à 0.

Nous supposons la méthode de résolution des équations du premier degré.

## Modifications autorisées sur les équations.

**Théorème 1.**On ne modifie pas les solutions d'une équation en additionnant (respectivement en soustrayant, respectivement en multipliant, respectivement en divisant) par un même nombre non nul des deux côtés de l'égalité.

**Démonstration**.

Par exemple pour l'addition. En logique, pour toutes quantités $a$ et $b$, et pour toute expression $F(x)$, si $a = b$ alors $F(a) = F(b)$.

En particulier lorsque $F(x) = x + c$, nous obtenons $F(a) = F(b)$ et donc $a + c = b + c$.

La réciproque n'est pas évidente.

Remarques.

1. Attention lorsque vous divisez de vérifier que vous ne divisez pas par zéro.
2. On ne peut multiplier par zéro sans modifier les résultats de l'équation. Le pouvoir absorbant du zéro fait disparaître l'information contenue dans l'équation.
3. Ce résultat constitue une boîte à outils. Il indique des transformations autorisées sur une équation pour en trouver les solutions.
4. Il faut beaucoup s'entraîner pour savoir quelles transformations utiliser pour résoudre telle ou telle équation.
5. Il est bien sûr toujours possible d'ajouter ou soustraire 0 mais c'est sans intérêt.
6. Deux équations qui ont le même ensemble de solutions sont dite *équivalents*.

Exemples.

1. $x^3 + x^2 - 7 = 2x^3 + x^2 - 7$ et $x^3 = 2x^3$ ont le même ensemble de solutions.

## Produit nul de réels.

**Proposition 1.** Soient $a$ et $b$ deux nombres réels. $ab = 0$ si et seulement si ($a = 0$ ou $b = 0$).

**Démonstration.** Raisonnons par l'absurde : supposons que $ab = 0$ et que $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Puisque $b \neq 0$ : $ab = 0 \iff \frac{ab}{b} = \frac{0}{b} \iff a = 0$ ce qui contredit le fait que $a \neq 0$.

Exemples.

1. Si $3x = 0$ alors nécessairement $x = 0$.
2. Si $(x+1)a = 0$ alors forcément $x + 1 = 0$ ou $a = 0$.
3. Résolvons l'équation $(E)$ : $\quad 2(x+2)(-3x+4) = 0$.
   $(E)$ équivaut à $x + 2 = 0$ ou $-3x + 4 = 0$.
   Or

$$\begin{aligned} x+2=0 &\iff x+2-2=0-2 \\ &\iff x=-2 \end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned} -3x+4=0 &\iff -3x+4-4=0-4 \\ &\iff -3x=-4 \\ &\iff \frac{-3x}{-3}=\frac{-4}{-3} \\ &\iff x=\frac{4}{3} \end{aligned}$$

   donc $(E)$ équivaut à $x = -2$ ou $x = \frac{4}{3}$.

   $$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E) \text{ est } \left\{-2; \tfrac{4}{3}\right\}.}$$

Remarques.

1. Il est parfois intéressant d'utiliser la négation de cette phrase : $a \cdot b \neq 0$ équivaut à

$$a \neq 0 \quad \text{et} \quad b \neq 0$$

2. Ce résultat ne s'applique qu'aux nombres. Il n'est, par exemple, pas vrai pour des fonctions.

## Équation produit-nul

Nous appellerons *équation produit-nul* une équation dont l'un des membres est un produit et l'autre 0.

EXERCICE 1. Identifiez (sans transformer les expressions) les équations produit nul.

| | | |
|---|---|---|
| a) $(x-1)(2x+3) = 0$ | b) $x^2(x+3) = 0$ | c) $4x^2 + 5x = 0$ |
| d) $(2x+3)(x+6) = 1$ | e) $(2x-5)(x+1) = 0$ | f) $(2x-5)(x+4) - 1 = 0$ |

Exercice 1. 3, 4 et 6 ne sont pas des équations produits car

* $4x^2 + 5x$ est une somme.
* $(2x+3)(x+6) = 1$ n'est pas égale à 0.
* $(2x-5)(x+4) - 1$ est une différence.

## Factoriser pour se ramener à des équations produit nul.

EXERCICE 2. Écrivez les équations suivantes sous forme d'une équation produit puis résolvez-les.

a) $E_1$ : $2x^2 = 3x$.
b) $E_2$ : $12x = 6x^2 + 6$.
c) $E_3$ : $x^2 = 5$.
d) $E_4$ : $x^2 = y^2$.
e) $E_5$ : $(2x+3)^2 = (x-1)^2$.
f) $E_6$ : $(3x+1)(x-5) = 5(5-x)$.

Exercice 2.

a) Écrivons l'équation sous forme d'équation produit.
Nous nous ramenons à une égalité à 0.

$$\begin{aligned}(E_1) &\iff 2x^2 - 3x = 3x - 3x\\ &\iff 2x^2 - 3x = 0\end{aligned}$$

Il faut à présent factoriser.

$$(E_1) \iff x(2x-3) = 0$$

$$\boxed{(E_1) \iff x(2x-3) = 0}$$

$$\begin{aligned}x(2x-3) = 0 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - 3 = 0\\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 2x = 3\\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } E_1 \text{ est } \mathscr{S} = \left\{0; \tfrac{2}{3}\right\}.}$$

b)

$$\begin{aligned}(E_2) &\iff 12x = 6x^2 + 6\\ &\iff 12x - 12x = 6x^2 + 6 - 12x\\ &\iff 0 = 6x^2 - 12x + 6\\ &\iff 0 = 6x^2 - 6 \times 2x + 6 \times 1\\ &\iff 0 = 6(x^2 - 2x + 1)\\ &\iff 0 = 6(x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2)\\ &\iff 0 = 6(x-1)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}6(x-1)^2 = 0 &\iff x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 1 = 0\\ &\iff x = 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } E_2 \text{ est } \mathscr{S} = \{1\}.}$$

c)

$$\begin{aligned}(E_3) &\Leftrightarrow x^2 = 5\\ &\Leftrightarrow x^2-5 = 5-5\\ &\Leftrightarrow x^2 - 5 = 0\\ &\Leftrightarrow x^2 - \sqrt{5}^2 = 0\\ &\Leftrightarrow (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) = 0\end{aligned}$$

Nous avons ici une démonstration algébrique d'un résultat déjà connu $x^2 = 25$ admet deux solutions : 5 et $-5$.

$$\begin{aligned}(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) = 0 &\Leftrightarrow x-\sqrt{5} = 0 \quad \text{ou} \quad x+\sqrt{5} = 0\\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{5} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{5}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de $E_3$ est $\mathscr{S} = \left\{\sqrt{5}; -\sqrt{5}\right\}$.

d)

$$\begin{aligned}(E_4) &\Leftrightarrow x^2 = y^2\\ &\Leftrightarrow x^2-y^2 = y^2-y^2\\ &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0\\ &\Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 0\end{aligned}$$

$$(x-y)(x+y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \text{ou} \quad x = -y$$

Nous verrons plus tard que l'ensemble des solutions (qui est formé de couples $(x,y)$) peut être interprété comme les coordonnées de points formant deux droites.

e)

$$\begin{aligned}(E_5) &\Leftrightarrow (2x+3)^2 = (x-1)^2\\ &\Leftrightarrow (2x+3)^2-(x-1)^2 = (x-1)^2-(x-1)^2\\ &\Leftrightarrow (2x+3)^2 - (x-1)^2 = 0\\ &\Leftrightarrow [(2x+3)-(x-1)][(2x+3)+(x-1)] = 0\\ &\Leftrightarrow (2x+3-x+1)(2x+3+x-1) = 0\\ &\Leftrightarrow (x+4)(3x+2) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+4)(3x+2) = 0 &\Leftrightarrow x+4 = 0 \quad \text{ou} \quad 3x+2 = 0\\ &\Leftrightarrow x = -4 \quad \text{ou} \quad 3x = -2\\ &\Leftrightarrow x = -4 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de $E_5$ est $\mathscr{S} = \left\{-4; -\frac{2}{3}\right\}$.

f)

$$\begin{aligned}
(E_6) &\iff (3x+1)(x-5)=5(5-x)\\
&\iff (3x+1)(x-5)-5(5-x)=5(5-x)-5(5-x)\\
&\iff (3x+1)(x-5)-5(5-x)=0\\
&\iff (3x+1)(x-5)+5(x-5)=0\\
&\iff [(3x+1)+5](x-5)=0\\
&\iff [3x+6](x-5)=0\\
&\iff 3(x+2)(x-5)=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3(x+2)(x-5)=0 &\iff x+2=0 \quad \text{ou} \quad x-5=0\\
&\iff x=-2 \quad \text{ou} \quad x=5
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de $E_6$ est $\mathscr{S}=\{-2;5\}$.

EXERCICE 3. Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $4x=0$.
b) $x(x-1)=0$.
c) $(x-2)(x-3)=0$.
d) $(x+1)(x-4)=0$.
e) $(2x-4)(3x+6)=0$.
f) $(-3x+1)(2x+7)=0$.

## Exercices.

EXERCICE 4. Résolvez les équations suivantes.

a) $x(x-2)=0$.
b) $(x-1)(x-3)=0$.
c) $(x-4)(x-5)=0$.
d) $(x-10)(x-20)=0$.
e) $(x+1)(x+2)=0$.
f) $(x+13)(x+24)=0$.
g) $(x+3)(x+7)=0$.
h) $(x+17)(x+26)=0$.
i) $3(x-3)(x+2)=0$.
j) $-2(x+1)(x-3)=0$.
k) $12(x-3)(x+2)=0$.
l) $200(x-1000)(x+3000)=0$.
m) $(3x-1)(4x-5)=0$.
n) $(7x-1)(6x-5)=0$.
o) $(13x-7)(25x-17)=0$.
p) $(2x-5)(3x-8)=0$.
q) $(3x+2)(4x-6)=0$.
r) $(-8x+1)(9x+3)=0$.
s) $(13x+3)(4x-12)=0$
t) $(13x+2)(2x-3)=0$.
u) $(-2x-3)(4x-7)=0$.
v) $(3x-6)(4x+1)=0$.
w) $(x-13)(x+1{,}2)=0$.
x) $x(3x-1)(-7x+1)=0$.

Exercice 4.

a) $\{0;2\}$.
b) $\{1;3\}$.
c) $\{4;5\}$.
d) $\{10;20\}$.
e) $\{-1;-2\}$.
f) $\{-13;-24\}$.
g) $\{-3;-7\}$.
h) $\{-17;-26\}$.
i) $\{3;-2\}$.
j) $\{-1;3\}$.
k) $\{3;-2\}$.
l) $\{1000;-3000\}$.
m) $\left\{\frac{1}{3};\frac{5}{4}\right\}$.
n) $\left\{\frac{1}{7};\frac{5}{6}\right\}$.
o) $\left\{\frac{7}{13};\frac{17}{25}\right\}$.
p) $\left\{\frac{5}{2};\frac{8}{3}\right\}$.
q) $\left\{-\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right\}$.
r) $\left\{\frac{1}{8};-\frac{1}{3}\right\}$.
s) $\left\{-\frac{3}{13};3\right\}$.
t) $\left\{-\frac{2}{13};\frac{3}{2}\right\}$.
u) $\left\{-\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right\}$.
v) $\left\{2;-\frac{1}{4}\right\}$.
w) $\{13;-1{,}2\}$.
x) $\left\{0;\frac{1}{3};\frac{1}{7}\right\}$.

EXERCICE 5. Résolvez les équations suivantes.

a) $4x^2=3x$
b) $(2x-1)(x+3)=0$

c) $3x(x-1)=5(x-1)$
d) $2x+3=x^2+3$
e) $(x-2)^2=0$
f) $(2x-1)(4-x)=0$
g) $x+(x-2)=-1$
h) $x(x-2)=-1$
i) $(x+1)^2-16x^2=0$
j) $3x^3+2x^2=0$
k) $2x^3=x^2$
l) $16x^2=24x$
m) $x(x+4)=-4$
n) $(x+1)^3-(x+1)^2=0$
o) $4x^2-2x=6(2x-1)$
p) $(x+2)^2-3x-6=0$
q) $9x^2-4x=2x-1$
r) $(2x+1)^2=4x^2-1$
s) $4(x+1)^2=2(x+1)(2x-3)$
t) $x^4-16=0$

Exercice 5.

a) $\mathcal{S}=\left\{0;\frac{3}{4}\right\}$.
b) $\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{2};-3\right\}$.
c)

$$\begin{aligned}3x(x-1)=5(x-1)&\iff 3x(x-1)-5(x-1)=0\\&\iff(3x-5)(x-1)=0\\&\iff 3\left(x-\frac{5}{3}\right)(x-1)\end{aligned}$$

$\mathcal{S}=\left\{\frac{5}{3};1\right\}$.
d) $\mathcal{S}=\{0;2\}$.
e) $\mathcal{S}=\{2\}$.
f) $\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{2};4\right\}$.
g) Résolvons l'équation proposée.
L'équation proposée ne fait intervenir ni carré ni plus grande puissance de $x$. C'est une équation linéaire du premier degré. L'équation produit-nul n'est pas utile. La méthode consiste à isoler l'inconnue $x$.
Avant d'enlever des parenthèses nous vérifions

Étape 1 qu'il n'y a d'exposant s'appliquant aux parenthèses,

Étape 2 que les parenthèses ne sont multiplié par rien ni à droite ni à gauche,

Étape 3 qu'il n'y a pas de signe moins devant les parenthèses.

C'est bien le cas ici.

$$\begin{aligned}x+(x+2)=-1&\iff x+x-2=-1\\&\iff 2x-2+2=-1+2\\&\iff 2x=1\\&\iff\frac{2x}{2}=\frac{1}{2}\\&\iff x=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

L'ensemble des solution de l'équation est $\mathscr{S}=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

h) Résolvons l'équation proposée.
On se ramène à une équation nulle :

$$\begin{aligned} x(x+2) = -1 &\Leftrightarrow x(x+2)+1 = -1+1 \\ &\Leftrightarrow x(x+2)+1 = 0 \end{aligned}$$

Nous essayons maintenant de faire un produit donc de factoriser mais il n'y a ni facteur commun ni identité remarquable en désespoir de cause développons :

$$\begin{aligned} x(x+2) = -1 &\Leftrightarrow x \times x + x \times 2 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \end{aligned}$$

On recommence nos tentatives de factorisation : recherche d'un facteur commun ça ne donne rien, par contre l'identité remarquable ...

$$\begin{aligned} x(x+2) = -1 &\leftrightarrow x^2 + 2 \times x \times 1 = 1^2 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x+1 = 0 \quad \text{ou} \quad x+1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x+1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \{1\}$.

i) $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{3}; -\frac{1}{5}\right\}$.
j) Résolvons l'équation.
L'équation est déjà une égalité à zéro. Il y a ici des facteurs communs.

$$\begin{aligned} 3x^3 + 2x^2 = 0 &\Leftrightarrow 3 \times x \times x \times x + 2 \times x \times x = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2(3x+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad 3x+2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad 3x = -2 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \left\{0; -\frac{2}{3}\right\}$.

k) $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}; 0\right\}$.
l) $\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}; 0\right\}$.
m) $\mathcal{S} = \{-2\}$.
n) $\mathcal{S} = \{0; -1\}$.
o) $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}; 3\right\}$.
p) $\mathcal{S} = \{-2; 1\}$.
q) $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{3}\right\}$.
r) $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
s) $\mathcal{S} = \{-1\}$.
t) $\mathcal{S} = \{-2; 2\}$.

EXERCICE 6. Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $x^2 + 1 = 0$.
b) $(3x-2)(5x+4) = 0$.
c) $x^2 - 2x = 0$.
d) $(x+1)^2 = 0$.

Exercice 6.

a) $\mathscr{S} = \varnothing$.

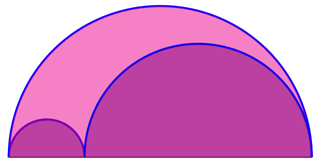
b) $\mathscr{S} = \left\{\frac{2}{3}; -\frac{4}{5}\right\}$.

c) $\mathscr{S} = \{0; 2\}$.

d) $\mathscr{S} = \{-1\}$.

EXERCICE 7.

Soit $M$ un point du segment $[AB]$. On considère les demi-disques de diamètres $[AB]$, $[AM]$ et $[MB]$ comme représentés ci-contre.




On donne $AB = 8$. Nous noterons $AM = 2x$. $f(x)$ désignera l'aire de la partie colorée en violet (*i.e.* les deux demi-disques de diamètres $[AM]$ et $[MB]$).

1. À quel intervalle appartient $x$ ?
2. Démontrez que $f(x) = \pi(x^2 - 4x + 8)$.
3. Les aires des deux parties colorées peuvent-elles être égales ?

Exercice 7.

1. Déterminons l'intervalle dans lequel varie $x$.
   * Puisque $2x = AM$ et que $AM$ est une longueur, nécessairement $x \geq 0$.
   * $M \in [AB]$ et $AB = 8$ donc $AM \leq 8$.
     D'où : $\frac{AM}{2} \leq \frac{8}{2}$.
     Autrement dit $x \leq 4$.

   Nous avons démontré que $x \in [0; 4]$.

2. Démontrons que $f(x) = \pi(x^2 - 4x + 8)$.
   * Le rayon du demi-disque de diamètre $[AM]$ est $x$ (car $2x = AM$). Donc l'aire du demi-disque de diamètre $[AM]$ est
   $$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2} \times \pi x^2$$
   * Le rayon du demi-disque de diamètre $[MB]$ est
   $$\begin{aligned} \frac{1}{2}MB &= \frac{1}{2}(AB - AM) && \text{car } M \in [AB] \\ &= \frac{1}{2}(8 - 2x) \\ &= 4 - x \end{aligned}$$
   Donc l'aire du demi-disque de diamètre $[MB]$ est
   $$\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2} \times \pi (4 - x)^2$$
   * Nous déduisons des deux points précédents
   $$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \\ &= \frac{1}{2}\pi x^2 + \frac{1}{2}\pi(4 - x)^2 \end{aligned}$$
   En factorisant :
   $$f(x) = \frac{1}{2}\pi\left[x^2 + (4 - x)^2\right]$$
   En développant l'identité remarquable :
   $$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\pi[x^2 + 16 - 8x + x^2] \\ &= \frac{1}{2}\pi(2x^2 - 8x + 16) \\ &= \pi(x^2 - 4x + 8) \end{aligned}$$

Nous avons bien : $f(x)\pi(x^2 - 4x + 8)$.

3. Dire que les deux parties colorées ont la même aire se traduit par

$$\frac{1}{2}\pi 4^2 - f(x) = f(x) \quad (E)$$

Résolvons l'équation $(E)$.

$$\begin{aligned}
(E) &\Leftrightarrow 8\pi - 2f(x) = 0\\
&\Leftrightarrow 8\pi - 2 \times \pi(x^2 - 4x + 8) = 0\\
&\Leftrightarrow -2\pi\left[-4 + (x^2 - 4x + 8)\right] = 0\\
&\Leftrightarrow -2\pi\left[-4 + x^2 - 4x + 8\right] = 0\\
&\Leftrightarrow -2\pi(x^2 - 4x + 4) = 0\\
&\Leftrightarrow -2\pi(x - 2)^2 = 0\\
&\Leftrightarrow x - 2 = 0\\
&\Leftrightarrow x = 2
\end{aligned}$$

$2 \in [0; 4]$, nous pouvons donc conclure.

Les aires des parties colorées ne peuvent être égales que lorsque $x = 2$.

EXERCICE 8. Soit $g$ la fonction définie par $g(x) = -2x^2 + 8x - 8$ sur $[0; +\infty[$ et $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.

1. Démontrez que pour tout $x \in [0; +\infty[$, $g(x) = -2(x - 2)^2$
2. Déterminez le point d'intersection de $\mathcal{C}_g$ et de l'axe des ordonnées.
3. Déterminez s'ils existent les points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_g$ avec l'axe des abscisses.
4. Déterminez les abscisses des points de $\mathcal{C}_g$ ayant pour ordonnée $-8$.

Exercice 8.

1. Nous allons voir deux façons de démontrer le résultat.
   Démontrons que, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -2(x - 2)^2$.
   Démonstration en factorisant.
   Nous devons démontrer un résultat « pour tout $x$ » ou « quelque soit » nous commençons par « fixer » cette variable :
   Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
g(x) &= -2x^2 + 8x - 8\\
&= -2(x^2 - 4x + 4)\\
&= -2(x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2)\\
&= -2(x - 2)^2
\end{aligned}$$

   Nous avons démontré que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = -2(x - 2)^2$$

   Démontrons que, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -2(x - 2)^2$.
   Démonstration en développant le résultat donné dans l'énoncé.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
-2(x-2)^2 &= -2\left[x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2\right] \\
&= -2(x^2 - 4x + 4) \\
&= -2 \times x^2 + (-2) \times (-4)x + (-2) \times 4 \\
&= -2x^2 + 8x - 8 \\
&= g(x)
\end{aligned}$$

Nous avons démontré que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = -2(x-2)^2}$$

2. Le préfixe « le » à propos du point d'intersection sous-entend qu'il est unique. Ceci découle du fait que, pour une fonction il y a unicité de l'image.
Déterminer un point doit se comprendre dans le sens de trouver ses coordonnées.
Déterminons $M(x_M ; y_M)$ point d'intersection de $\mathcal{C}_g$ avec l'axe des ordonnées.
Interprétons les conditions imposées à $M$ avec un point de vue d'analyse.
Dire que $M$ appartient à l'axe des ordonnées équivaut à dire que $x_M = 0$.
Dire que $M \in \mathcal{C}_g$ équivaut à dire que $y_M = g(x_M)$. Donc : $y_M = g(0) = -8$.

Le point d'intersection de $\mathcal{C}_g$ avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées $(0; 8)$.

3. Déterminons les points d'intersection de $\mathcal{C}_g$ avec l'axe des abscisses.
Supposons qu'il existe un point $M(x_M ; y_M)$ qui soit l'intersection de $\mathcal{C}_g$ avec l'axe des abscisses.
$M$ appartient à l'axe des abscisses donc $y_M = 0$.
$M$ appartient à $\mathcal{C}_g$ donc $g(x_M) = 0$.
Résolvons cette dernière équation d'inconnue $x_M$.

$$\begin{aligned}
g(x_M) = 0 &\iff -2(x-2)^2 = 0 \\
&\iff x - 2 = 0 \\
&\iff x = 2
\end{aligned}$$

$2 \in [0; +\infty[$ et $g(2) = 0$ donc c'est une solution qui convient bien.

L'unique point d'intersection de $\mathcal{C}_g$ avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $(2; 0)$.

4. Déterminons les abscisses des points de $\mathcal{C}_g$ d'ordonnée $-8$.
En raisonnant comme précédemment cela revient à dire que nous cherchons les nombres $x \in [0 : +\infty[$ tels que : $g(x) = -8$.
Résolvons cette équation.

$$\begin{aligned}
g(x) = -8 &\iff -2x^2 + 8x - 8 = -8 \\
&\iff -2x^2 + 8x = 0 \\
&\iff x(-2x + 8) = 0 \\
&\iff x = 0 \text{ ou } -2x + 8 = 0
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
-2x + 8 &\iff -2x + 8 - 8 = 0 - 8 \\
&\iff -2x = -8 \\
&\iff \frac{-2x}{-2} = \frac{-8}{-2} \\
&\iff x = 4
\end{aligned}$$

donc, comme 0 et 4 sont bien dans l'ensemble $[0; +\infty[$ et $g(0) = g(4) = -8$, nous pouvons conclure.

Les abscisses des points de $\mathcal{C}_g$ ayant pour ordonnée $-8$ forment l'ensemble $\{0; 4\}$.

EXERCICE 9. Soit $f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$ quelque soit $x$ réel. Déterminez les zéros de la fonction $f$.

Exercice 9. Les *zéros d'une fonctions* sont les nombres $x$ de son ensemble de définitions telles que : $f(x) = 0$. Ce sont les valeurs de $x$ qui annulent $f$.

Il faut trouver les valeurs $x$ telles que $f(x) = 0$.

Résolvons l'équation $f(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$.

$f(x) = 0$ équivaut successivement à

$$4x^3 - 24x^2 + 36x = 0$$

Il s'agit d'une équation polynomiale de degré 3 nous essayons de factoriser.

$$4x(x^2 - 6x + 9) = 0$$
$$4x(x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2) = 0$$
$$4x(x - 3)^2 = 0$$
$$x = 0 \text{ ou } x = 3$$

L'ensemble des zéros de $f$ est $\{0; 3\}$.

EXERCICE 10. Proposez une équation ayant pour ensemble des solutions $\mathcal{S}$.

a) $\mathcal{S} = \{4\}$
b) $\mathcal{S} = \{2; 0\}$
c) $\mathcal{S} = \left\{\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right\}$
d) $\mathcal{S} = \left\{-2; \frac{2}{3}; 4\right\}$

EXERCICE 11. Deux nombres ont pour somme 314. De combien augmente leur produit si on ajoute 9 à chacun des deux ?

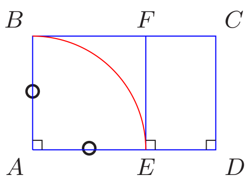
Exercice 11. Ici il n'y a pas besoin de résoudre une équation, car il n'y a pas de condition à résoudre, on nous demande d'effectuer un calcul.

$x + y = 314$ et on souhaite calculer $(x + 9)(y + 9) - xy$ et on obtient $9 \times 323$.

EXERCICE 12.

Le rectangle d'or est un rectangle tel que, si on lui enlève un carré construit sur une largeur, on obtient un nouveau rectangle de même forme, c'est-à-dire dont le rapport $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ est le même.

Ce rapport est alors appelé *nombre d'or* ou « divine proportion ». Il est noté $\varphi$.




1. Soit $L$ la longueur de départ et $l$ la largeur de départ. Calculez le rapport $\frac{DC}{ED}$ en fonction de $L$ et $l$.
2. Montrez que
$$\frac{BC}{BA} = \frac{DC}{ED} \Leftrightarrow L(L - l) = l^2.$$
3. En déduire que le rapport $\frac{L}{l}$ est solution de l'équation
$$x^2 = x + 1$$
Le nombre d'or vérifie donc la propriété « si on l'augmente de 1, il est égale à son carré ».

4. Montrez que l'on a

$$x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

5. En déduire la valeur exacte de $\varphi$ puis une valeur approchée à $10^{-3}$ près.

EXERCICE 13.