Équation produit-nul.

Généralités sur les équations.

Modifications autorisées sur les équations.

Produit nul de réels.

Équation produit-nul

EXERCICE 1. Identifiez (sans transformer les expressions) les équations produit nul.

a) $(x-1)(2x+3)=0$
b) $x^2(x+3)=0$
c) $4x^2+5x=0$
d) $(2x+3)(x+6)=1$
e) $(2x-5)(x+1)=0$
f) $(2x-5)(x+4)-1=0$

Factoriser pour se ramener à des équations produit nul.

EXERCICE 2. Écrivez les équations suivantes sous forme d'une équation produit puis résolvez-les.

a) E_1 : $2x^2=3x$.
b) E_2 : $12x=6x^2+6$.
c) E_3 : $x^2=5$.
d) E_4 : $x^2=y^2$.
e) E_5 : $(2x+3)^2=(x-1)^2$.
f) E_6 : $(3x+1)(x-5)=5(5-x)$.

EXERCICE 3. Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $4x=0$.
b) $x(x-1)=0$.
c) $(x-2)(x-3)=0$.
d) $(x+1)(x-4)=0$.
e) $(2x-4)(3x+6)=0$.
f) $(-3x+1)(2x+7)=0$.

Exercices.

EXERCICE 4. Résolvez les équations suivantes.

a) $x(x-2)=0$.
b) $(x-1)(x-3)=0$.
c) $(x-4)(x-5)=0$.
d) $(x-10)(x-20)=0$.
e) $(x+1)(x+2)=0$.
f) $(x+13)(x+24)=0$.
g) $(x+3)(x+7)=0$.
h) $(x+17)(x+26)=0$.
i) $3(x-3)(x+2)=0$.
j) $-2(x+1)(x-3)=0$.
k) $12(x-3)(x+2)=0$.
l) $200(x-1000)(x+3000)=0$.
m) $(3x-1)(4x-5)=0$.
n) $(7x-1)(6x-5)=0$.
o) $(13x-7)(25x-17)=0$.
p) $(2x-5)(3x-8)=0$.
q) $(3x+2)(4x-6)=0$.
r) $(-8x+1)(9x+3)=0$.
s) $(13x+3)(4x-12)=0$
t) $(13x+2)(2x-3)=0$.
u) $(-2x-3)(4x-7)=0$.
v) $(3x-6)(4x+1)=0$.
w) $(x-13)(x+1{,}2)=0$.
x) $x(3x-1)(-7x+1)=0$.

EXERCICE 5. Résolvez les équations suivantes.

a) $4x^2=3x$
b) $(2x-1)(x+3)=0$
c) $3x(x-1)=5(x-1)$
d) $2x+3=x^2+3$
e) $(x-2)^2=0$
f) $(2x-1)(4-x)=0$
g) $x+(x-2)=-1$
h) $x(x-2)=-1$
i) $(x+1)^2-16x^2=0$
j) $3x^3+2x^2=0$
k) $2x^3=x^2$
l) $16x^2=24x$
m) $x(x+4)=-4$
n) $(x+1)^3-(x+1)^2=0$

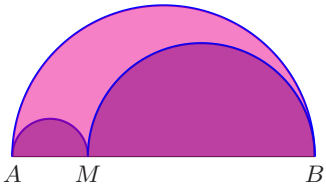
o) $4x^2 - 2x = 6(2x - 1)$
p) $(x + 2)^2 - 3x - 6 = 0$
q) $9x^2 - 4x = 2x - 1$
r) $(2x + 1)^2 = 4x^2 - 1$
s) $4(x + 1)^2 = 2(x + 1)(2x - 3)$
t) $x^4 - 16 = 0$

EXERCICE 6. Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $x^2 + 1 = 0$.
b) $(3x - 2)(5x + 4) = 0$.
c) $x^2 - 2x = 0$.
d) $(x + 1)^2 = 0$.

EXERCICE 7.

Soit M un point du segment $[AB]$. On considère les demi-disques de diamètres $[AB]$, $[AM]$ et $[MB]$ comme représentés ci-contre.



On donne $AB = 8$. Nous noterons $AM = 2x$. $f(x)$ désignera l'aire de la partie colorée en violet (*i.e.* les deux demi-disques de diamètres $[AM]$ et $[MB]$).

1. À quel intervalle appartient x ?
2. Démontrez que $f(x) = \pi(x^2 - 4x + 8)$.
3. Les aires des deux parties colorées peuvent-elles être égales ?

EXERCICE 8. Soit g la fonction définie par $g(x) = -2x^2 + 8x - 8$ sur $[0; +\infty[$ et $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.

1. Démontrez que pour tout $x \in [0; +\infty[$, $g(x) = -2(x - 2)^2$
2. Déterminez le point d'intersection de $\mathcal{C}_g$ et de l'axe des ordonnées.
3. Déterminez s'ils existent les points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_g$ avec l'axe des abscisses.
4. Déterminez les abscisses des points de $\mathcal{C}_g$ ayant pour ordonnée -8.

EXERCICE 9. Soit $f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$ quelque soit x réel. Déterminez les zéros de la fonction f.

EXERCICE 10. Proposez une équation ayant pour ensemble des solutions $\mathcal{S}$.

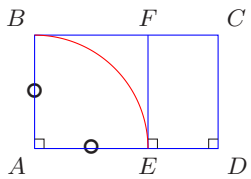
a) $\mathcal{S} = \{4\}$
b) $\mathcal{S} = \{2; 0\}$
c) $\mathcal{S} = \left\{\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right\}$
d) $\mathcal{S} = \left\{-2; \frac{2}{3}; 4\right\}$

EXERCICE 11. Deux nombres ont pour somme 314. De combien augmente leur produit si on ajoute 9 à chacun des deux ?

EXERCICE 12.

Le rectangle d'or est un rectangle tel que, si on lui enlève un carré construit sur une largeur, on obtient un nouveau rectangle de même forme, c'est-à-dire dont le rapport $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ est le même.

Ce rapport est alors appelé *nombre d'or* ou « divine proportion ». Il est noté φ.



1. Soit L la longueur de départ et l la largeur de départ. Calculez le rapport $\frac{DC}{ED}$ en fonction de L et l.
2. Montrez que

$$\frac{BC}{BA} = \frac{DC}{ED} \Leftrightarrow L(L - l) = l^2.$$

3. En déduire que le rapport $\frac{L}{l}$ est solution de l'équation

$$x^2 = x + 1$$

Le nombre d'or vérifie donc la propriété « si on l'augmente de 1, il est égale à son carré ».

4. Montrez que l'on a

$$x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

5. En déduire la valeur exacte de φ puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

EXERCICE 13.