

Développer des expressions polynomiales.

I Les polynômes.

Les monômes sont des expressions algébriques formées du produit d'un *coefficient* a réel par une puissance (entière) d'une *indéterminée* X : aX^n .

Exemples de monômes : $4X^0 = 4$, $-3X^1 = -3X$, πX^2 , $12,5X^7$ et $0X = 0$

L'exposant de X est appelé le *degré* du monôme. Par exemple : $-3X$ est de degré 1, πX^2 est de degré 2, $12,5X^7$ est de degré 7, 4 est de degré 0 et $0X = 0$ est de degré $-\infty$.

Un *polynôme* est une somme (finie) de monômes.

Par exemple : $-3 + 8X^2 + 4X - 7X^3 - 7X + 10$ est un polynôme.

On dit qu'un polynôme est *réduit* lorsque tout ses monômes sont de degrés distincts. Ainsi $3X^2 - 12X^5 + 2$ est sous forme réduite mais $5 + 7X - 14X^2 + 8X$ n'est pas sous forme réduite car les monômes $7X$ et $8X$ sont semblables (même degré).

Exercice 1

Donnez la forme réduite des polynômes suivants :

1. $-3X^2 + 7X - 4X + 12X^3 + 2$
2. $7X^{25} - 8X + 3 + X - 7X + 12$
3. $3X^2 + 2X + 4X + 12$

Le degré d'un polynôme réduit est le plus grand degré de ses monômes.

Un polynôme réduit est dit *ordonné* lorsque ses monômes sont rangés suivant les puissances décroissantes de l'indéterminée X . Par exemple $-7X^3 + X - 3$ est ordonné alors que $X - 7X^2 + 2$ ne l'est pas.

Exercice 2

Donnez la forme réduite et ordonnée des polynômes suivants :

1. $4X^3 - 2X^2 + 7X - 14 + 3X$
2. $23 + X + X^2$
3. $3X + 4X^2 + 9X + 9$

II Développer.

Développer, réduire et ordonner.

$X^2(3X - 1)$ n'est, a priori, pas un polynôme puisque ce n'est pas une somme de monômes. Cependant en distribuant X^2 :

$$\begin{aligned} X^2(3X - 1) &= X^2 3X - X^2 1 \\ &= X^2 3X^1 - X^2 \\ &= 3X^{2+1} - X^2 \\ &= 3X^3 - X^2 \end{aligned}$$

Ainsi $X^2(3X - 1) = 3X^3 - X^2$ est bien un polynôme de degré 3.

Afin d'identifier chaque polynôme la convention est de l'écrire sous forme développée réduite et ordonnée.

Définition 1

Deux polynômes sont dits *égaux* lorsqu'ils ont la même expression développée, réduite et ordonnée.

La boîte à outil pour développer.

Proposition 1

Les lettres a, b, c, d désignent des nombres, des expressions algébriques, des fonctions numériques etc.

- (i) *Distributivité* de la multiplication sur l'addition : $a(b + c) = ab + ac$
- (ii) Double distributivité : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
- (iii) *Identités remarquables* :
 - . $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 - . $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 - . $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

III Exercice.

Exercice 3

Développez, réduisez puis ordonnez les expressions suivantes :

- | | |
|-------------------------------------|---|
| 1. $A(X) = (X-1)(X-2) + (X-2)(X-3)$ | 10. $J(X) = (7X - \frac{1}{3})^2$ |
| 2. $B(X) = (X-2)(X^2+3) - (X+2)X^2$ | 11. $K(X) = (\frac{X}{2} - \frac{5}{6})(\frac{X}{2} + \frac{5}{6})$ |
| 3. $C(X) = (X+5)^2$ | 12. $L(X) = (5-11X)^2$ |
| 4. $D(X) = (X-5)^2$ | 13. $M(X) = (12+13X)^2$ |
| 5. $E(X) = (X+5)(X-5)$ | 14. $N(X) = (9X-4)(4+9X)$ |
| 6. $F(X) = (2X-7)^2$ | 15. $O(X) = (10X + \frac{1}{3})^2$ |
| 7. $G(X) = (3+2X)^2$ | 16. $P(X) = (-X+1,2)^2$ |
| 8. $H(X) = (11-X)(11+X)$ | 17. $Q(X) = (0,7-X)(0,7+X)$ |
| 9. $I(X) = (3X + \frac{5}{6})^2$ | 18. $R(X) = (11X-12)^2$ |

Exercice 4 pour s'entraîner.

Est-il possible que $x^2 - 3x + 4$ s'écrive pour tout x réel comme un produit de la forme $(x+1)(ax+b)$ avec a et b réels?

Exercice 5 pour s'entraîner.

Exercice 6 pour s'entraîner.

Développez, ordonnez puis réduisez les expressions polynomiales.

- | | |
|--|---|
| $P1(X) = (3X+4)(X-5),$ | $P21(X) = (2X-3)^2,$ |
| $P2(X) = 12(X-3) - 14(X+4),$ | $P22(X) = (3X-1)(5X-2) + (X+2)^2,$ |
| $P3(X) = 11(X-9) - 7(X-1),$ | $P23(X) = (5X-3)(3X+1) - (2X-4)(-X+5),$ |
| $P4(X) = 28X(3X^2 - 4X + 12),$ | $P24(X) = (1,5X-5)(1,5X+5) - (X-1)^2,$ |
| $P5(X) = 3,2X^2(5X^2 - 12X - 1,1),$ | $P25(X) = (5X+2)^2 - (X-3)^2,$ |
| $P6(X) = [(2X^2 - 2X + 3) - (2X^2 + 3)](5X^2 - 4X + 3),$ | $P26(X) = (3X-2)^2 - (5-4X)(4-6X),$ |
| $P7(X) = -2X(3X-X+2),$ | $P27(X) = (X-1)(2X+3) + (X-1)(X+2),$ |
| $P8(X) = 5X(X-3),$ | $P28(X) = (2X-5)(2X+5),$ |
| $P9(X) = 3X^2(2X^2 - X + 4),$ | $P29(X) = (3X+1)(7X-2) + (X-2)^2,$ |
| $P10(X) = (X+3)(X+4),$ | $P30(X) = (4X-3)(3X+2) - (2X+5)(X-3),$ |
| $P11(X) = (2X+1)(X+2),$ | $P31(X) = (1,5X-2)(1,5X+2) - (X+3)^2,$ |
| $P12(X) = (3X-2)(2X+3),$ | $P32(X) = (3X-2)^2 - (X-4)^2,$ |
| $P13(X) = (X-5)(X-2),$ | $P33(X) = (3X+1)^2 - (5-4X)(2+3X),$ |
| $P14(X) = (2X-1)(4X+3),$ | $P34(X) = (X-1)(2X+2) + (X-1)(2X+2),$ |
| $P15(X) = (2X-7)^2,$ | $P35(X) = (X+1)(X-3) + (X+1)(3X+1),$ |
| $P16(X) = (5X-2)(X+4),$ | $P36(X) = (2X-4)(X-1) - (X-2)(3X+2),$ |
| $P17(X) = (3X+1,5)(2X-3),$ | $P37(X) = (X-3)(X+2) - (X-2)(2X+1),$ |
| $P18(X) = (5X-7)(0,5X-1,2),$ | $P38(X) = (X+1)(X-4) - (2X+8)(X+5),$ |
| $P19(X) = (2X-1,1)(X+4),$ | $P39(X) = (3X-2)^2 - (5X-4)(2+3X),$ |
| $P20(X) = (X-7)(X+7),$ | $P40(X) = (X+2)(2X-3) + (X-1)(X+2).$ |

Exercice 7

Démontrez les égalités proposées, valables pour tout x réel.

1. $(-2x + 8)(x - 7) = -2x^2 + 22x - 56$,
2. $-9 + 6x + 3x^2 = -3(1 - x)(x + 3)$,
3. $-3(x - 3)^2 + 3 = -3(x - 4)(x - 2)$.

Exercice 8 pour s'entraîner.Exercice 9 pour s'entraîner.

Soit x un nombre réel différent de 1, démontrez que

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{1 - x^5}{1 - x}.$$