Développer des expressions polynomiales.

Les polynômes.

EXERCICE 1. Donnez la forme réduite des polynômes suivants :

a) $-3\mathbf{X}^2 + 7\mathbf{X} - 4\mathbf{X} + 12\mathbf{X}^3 + 2$

b) $7\mathbf{X}^{25} - 8\mathbf{X} + 3 + \mathbf{X} - 7\mathbf{X} + 12$

c) $3\mathbf{X}^2 + 2\mathbf{X} + 4\mathbf{X} + 12$

EXERCICE 2. Donnez la forme ordonnée et réduite des polynômes suivants :

a) $4\mathbf{X}^3 - 2\mathbf{X}^2 + 7\mathbf{X} - 14 + 3\mathbf{X}$

b) $23 + \mathbf{X} + \mathbf{X}^2$

c) $3\mathbf{X} + 4\mathbf{X}^2 + 9\mathbf{X} + 9$

Développer, réduire et ordonner des polynômes.

La boîte à outil pour développer.

Exercice.

EXERCICE 3. Développez, ordonnez puis réduisez les expressions suivantes.

a) $A(x) = 4x(x+3)$.

b) $B(x) = (3+x)(2x-1)$.

c) $C(x) = (x+3)^2$.

d) $D(x) = (2x-4)^2$.

e) $E(x) = (-x+5)(-x-5)$.

f) $F(a) = (10^3 - a)(10^3 + a)$.

g) $G(a,b) = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3)$.

h) $H(a,b,c) = (a+b+c)^2$.

EXERCICE 4. Développez, réduisez puis ordonnez les expressions suivantes :

a) $A(x) = (x-1)(x-2)$

b) $B(x) = (11x-12)^2$

c) $C(x) = (x+5)^2$

d) $D(x) = (x-5)^2$

e) $E(x) = (x+5)(x-5)$

f) $F(x) = (2x-7)^2$

g) $G(x) = (3+2x)^2$

h) $H(x) = (11-x)(11+x)$

i) $I(x) = \left(3x + \frac{5}{6}\right)^2$

j) $J(x) = \left(7x - \frac{1}{3}\right)^2$

k) $K(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{5}{6}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{5}{6}\right)$

l) $L(x) = (5-11x)^2$

m) $M(x) = (12+13x)^2$

n) $N(x) = (9x-4)(4+9x)$

o) $O(x) = \left(10x + \frac{1}{3}\right)^2$

p) $P(x) = (-x+1{,}2)^2$

q) $Q(x) = (0{,}7-x)(0{,}7+x)$

r) $R(x) = (x-2)(x^2+3) - (x+2)x^2$

EXERCICE 5. Développez, ordonnez puis réduisez les expressions polynomiales.

a) $A(X) = (3X+4)(X-5)$,

b) $B(X) = 12(X-3) - 14(X+4)$,

c) $C(X) = 11(X-9) - 7(X-1)$,

d) $D(X) = 28X(3X^2 - 4X + 12)$,

e) $E(X) = 3{,}2X^2(5X^2 - 12X - 1{,}1)$,

f) $F(X) = -2X(3X - X + 2)$,

g) $G(X) = 5X(X-3)$,

h) $H(X) = 3X^2(2X^2 - X + 4)$,

i) $K(X) = (X+3)(X+4)$,

j) $L(X) = (2X+1)(X+2)$,

k) $M(X) = (3X-2)(2X+3)$,

l) $N(X) = (X-5)(X-2)$,

m) $P(X) = (2X-1)(4X+3)$,

n) $Q(X) = (2X-7)^2$,

o) $R(X) = (5X-2)(X+4)$,

p) $S(X) = (3X+1{,}5)(2X-3)$,

q) $T(X) = (5X-7)(0{,}5X-1{,}2)$,

r) $U(X) = (2X-1{,}1)(X+4)$,

s) $V(X) = (X-7)(X+7)$.

EXERCICE 6. Développez, ordonnez puis réduisez les expressions polynomiales.

a) $A(x) = (2X-3)^2$,
b) $B(X) = \left[(2X^2-2X+3)-(2X^2+3)\right](5X^2-4X+3)$,
c) $C(X) = (3X-1)(5X-2)+(X+2)^2$,
d) $D(X) = (5X-3)(3X+1)-(2X-4)(-X+5)$,
e) $E(X) = (1{,}5X-5)(1{,}5X+5)-(X-1)^2$,
f) $F(X) = (5X+2)^2-(X-3)^2$,
g) $G(X) = (3X-2)^2-(5-4X)(4-6X)$,
h) $H(X) = (X-1)(2X+3)+(X-1)(X+2)$,
i) $I(X) = (2X-5)(2X+5)$,
j) $J(X) = (3X+1)(7X-2)+(X-2)^2$,
k) $K(X) = (4X-3)(3X+2)-(2X+5)(X-3)$,
l) $L(X) = (1{,}5X-2)(1{,}5X+2)-(X+3)^2$,
m) $M(X) = (3X-2)^2-(X-4)^2$,
n) $N(X) = (3X+1)^2-(5-4X)(2+3X)$,
o) $P(X) = (X-1)(2X+2)+(X-1)(2X+2)$,
p) $Q(X) = (X+1)(X-3)+(X+1)(3X+1)$,
q) $R(X) = (2X-4)(X-1)-(X-2)(3X+2)$,
r) $S(X) = (X-3)(X+2)-(X-2)(2X+1)$,
s) $T(X) = (X+1)(X-4)-(2X+8)(X+5)$,
t) $U(X) = (3X-2)^2-(5X-4)(2+3X)$,
u) $V(X) = (X+2)(2X-3)+(X-1)(X+2)$.

EXERCICE 7. Démontrez les égalités proposées, valables pour tout x réel.

a) $(-2x+8)(x-7) = -2x^2+22x-56$,
b) $-9+6x+3x^2 = -3(1-x)(x+3)$,
c) $-3(x-3)^2+3 = -3(x-4)(x-2)$.

EXERCICE 8. Vérifiez que les trois formes proposées, A, B et C, correspondent à une même expression polynomiale.

a) $A(x) = (x-3)(x+5)$. $B(x) = x^2+2x-15$. $C(x) = (x+1)^2-16$.
b) $A(x) = x^2-2\sqrt{2}x-6$. $B(x) = (x-3\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$. $C(x) = (x-\sqrt{2})^2-8$
c) $A(x) = 2x^2+3x-2$. $B(x) = (2x-1)(x+2)$. $C(x) = 2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$.

EXERCICE 9. Est-il possible que x^2-3x+4 s'écrive pour tout x réel comme un produit de la forme $(x+1)(ax+b)$ avec a et b réels ?

EXERCICE 10. À la calculatrice, une instruction $x \wedge 3$ compte pour 2 multiplications : $x \wedge 3 = x \times x \times x$.

1. **Premier exemple.**
   Soit $f(x) = x^2+4x+3$ sur $\mathbb{R}$ (forme A).
   (a) Vérifiez que $f(x) = 3+x(x+4)$ pour tout x réel (forme H).
   (b) Combien d'opérations sont effectuées avec la forme A ? avec la forme H ?
   (c) On programme le calcul de $f(x)$ pour x variant de 0 à 2 avec un pas de 0,1. Combien d'opérations sont nécessaires avec chacune des deux formes ?
2. **Deuxième exemple.**
   Reprendre les questions a, b et c de la question 1 pour $f(x) = x^4+2x^3-3x^2+4x-1$ (forme A) et $f(x) = -1+x(4+x(-3+x(2+x)))$ (forme H).
3. **Troisième exemple.**
   Soit $f(x) = 4x^7+2x^6+3x^5-4x^4+2x^3-3x^2+4x-1$.
   (a) Proposer la forme H associée.
   (b) Reprendre les questions 1(b) et 1(c).

4. Quel est le gain obtenu en nombre d'opérations pour $f(x) = x^{50} + x^{49} + x^{48} + \cdots + x^2 + x + 1$?
   On pourra programmer un algorithme pour effectuer un calcul de ce gain.

EXERCICE 11. Soit x un nombre réel différent de 1, démontrez que $x^4+x^3+x^2+x+1 = \frac{1-x^5}{1-x}$.