

Développer des expressions polynomiales.

I Les polynômes.

Les monômes sont des expressions algébriques formées du produit d'un *coefficient* a réel par une puissance (entière) d'une *indéterminée* X : aX^n .

Exemples de monômes : $4X^0 = 4$, $-3X^1 = -3X$, πX^2 , $12,5X^7$ et $0X = 0$

L'exposant de X est appelé le *degré* du monôme. Par exemple : $-3X$ est de degré 1, πX^2 est de degré 2, $12,5X^7$ est de degré 7, 4 est de degré 0 et $0X = 0$ est de degré $-\infty$.

Un *polynôme* est une somme (finie) de monômes.

Par exemple : $-3 + 8X^2 + 4X - 7X^3 - 7X + 10$ est un polynôme.

On dit qu'un polynôme est *réduit* lorsque tous ses monômes sont de degrés distincts. Ainsi $3X^2 - 12X^5 + 2$ est sous forme réduite mais $5 + 7X - 14X^2 + 8X$ n'est pas sous forme réduite car les monômes $7X$ et $8X$ sont semblables (même degré).

Exercice 1

Donnez la forme réduite des polynômes suivants :

1. $-3X^2 + 7X - 4X + 12X^3 + 2$
2. $7X^{25} - 8X + 3 + X - 7X + 12$
3. $3X^2 + 2X + 4X + 12$

Correction exercice 1

1. $-3X^2 + 7X - 4X + 12X^3 + 2 = -3X^2 + 3X + 12X^3 + 2$
2. $7X^{25} - 8X + 3 + X - 7X + 12 = 7X^{25} - 14X + 15$
3. $3X^2 + 2X + 4X + 12 = 3X^2 + 6X + 12$

Le degré d'un polynôme réduit est le plus grand degré de ses monômes.

Un polynôme réduit est dit *ordonné* lorsque ses monômes sont rangés suivant les puissances décroissantes de l'indéterminée X . Par exemple $-7X^3 + X - 3$ est ordonné alors que $X - 7X^2 + 2$ ne l'est pas.

Exercice 2

Donnez la forme réduite et ordonnée des polynômes suivants :

1. $4X^3 - 2X^2 + 7X - 14 + 3X$
2. $23 + X + X^2$

$$3. 3X + 4X^2 + 9X + 9$$

Correction exercice 2

$$1. 4X^3 - 2X^2 + 7X - 14 + 3X = 4X^3 - 2X^2 + 10X - 14$$

$$2. 23 + X + X^2 = X^2 + X + 23$$

$$3. 3X + 4X^2 + 9X + 9 = 4X^2 + 12X + 9$$

Les polynômes ont ceci de merveilleux qu'ils peuvent s'appliquer à un très grand nombre d'objets X peut désigner des nombres bien sûr mais aussi des d'autres polynômes, des fonctions, des transformations géométriques, des tableaux de nombres (matrices), etc.

II Développer.

Dans la suite les indéterminées, X , seront notées comme des variables (x).

Développer, réduire et ordonner.

$x^2(3x - 1)$ n'est, a priori, pas un polynôme puisque ce n'est pas une somme de monômes. Cependant en distribuant x^2 :

$$\begin{aligned} x^2(3x - 1) &= x^2 3x - x^2 1 \\ &= x^2 3x^1 - x^2 \\ &= 3x^{2+1} - x^2 \\ &= 3x^3 - x^2 \end{aligned}$$

Ainsi $x^2(3x - 1) = 3x^3 - x^2$ est bien un polynôme de degré 3.

Afin d'identifier chaque polynôme la convention est de l'écrire sous forme développée, réduite et ordonnée.

Définition 1

Deux polynômes sont dits *égaux* lorsqu'ils ont la même expression développée, réduite et ordonnée.

La boîte à outil pour développer.**Proposition 1**

Les lettres a, b, c, d désignent des nombres, des expressions algébriques, des fonctions numériques etc.

- (i) *Distributivité* de la multiplication sur l'addition : $a(b + c) = ab + ac$
- (ii) Double distributivité : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
- (iii) *Identités remarquables* :
 - . $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 - . $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 - . $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Démonstration 1

- (i) La distributivité n'est pas démontrable. C'est un axiome de la construction de la multiplication de l'ensemble des nombres réels.
- (ii) On applique en deux temps la propriété de distributivité.
- (iii) Les égalités se démontrent en partant du membre de gauche vers faisant :
 - . $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$ puis on utilise la double distributivité.
 - . $(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$ puis on utilise la double distributivité.
 - . En utilisant la double distributivité.

III Exercice.**Exercice 3**

Développez, ordonnez puis réduisez les expressions suivantes.

1. $A(x) = 4x(x + 3)$.
2. $B(x) = (3 + x)(2x - 1)$.
3. $C(x) = (x + 3)^2$.
4. $D(x) = (2x - 4)^2$.
5. $E(x) = (-x + 5)(-x - 5)$.

Exercice 4

Développez, réduisez puis ordonnez les expressions suivantes :

1. $A(x) = (x - 1)(x - 2)$
2. $B(x) = (x - 2)(x^2 + 3) - (x + 2)x^2$
3. $C(x) = (x + 5)^2$
4. $D(x) = (x - 5)^2$
5. $E(x) = (x + 5)(x - 5)$
6. $F(x) = (2x - 7)^2$
7. $G(x) = (3 + 2x)^2$
8. $H(x) = (11 - x)(11 + x)$
9. $I(x) = (3x + \frac{5}{6})^2$
10. $J(x) = (7x - \frac{1}{3})^2$
11. $K(x) = (\frac{x}{2} - \frac{5}{6})(\frac{x}{2} + \frac{5}{6})$
12. $L(x) = (5 - 11x)^2$
13. $M(x) = (12 + 13x)^2$
14. $N(x) = (9x - 4)(4 + 9x)$
15. $O(x) = (10x + \frac{1}{3})^2$
16. $P(x) = (-x + 1,2)^2$
17. $Q(x) = (0,7 - x)(0,7 + x)$
18. $R(x) = (11x - 12)^2$

Exercice 5 pour s'entraîner.

Est-il possible que $x^2 - 3x + 4$ s'écrive pour tout x réel comme un produit de la forme $(x + 1)(ax + b)$ avec a et b réels ?

Correction exercice 5

Nous allons faire une démonstration par analyse-synthèse.

Notons $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

Analyse.

Supposons que $f(x) = (x + 1)(ax + b)$.

Comme

$$(x + 1)(ax + b) = ax^2 + (a + b)x + b,$$

et donc

$$ax^2 + (a + b)x + ab = x^2 - 3x + 4.$$

L'écriture sous forme développée, réduite et ordonnée étant unique, nous identifions les coefficients :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = -3 \\ b = 4 \end{cases}$$

Et donc : $a = 1$, $b = -4$ et $b = 4$.

Synthèse.

Les seules solutions possibles doivent vérifier à la fois $ab = 1 \times (-4) = -4$ mais aussi $b = 4$ ce qui est impossible donc il n'y a pas de solution au problème.

Il n'est donc pas possible de trouver une écriture de $x^2 - 3x + 4$ de la forme $(x + 1)(ax + b)$.

Démonstration plus brève. **Raisonnement par l'absurde.**

Raisonnons par l'absurde en supposant que nous avons trouvé des nombres a et b tels que pour tout x réel $x^2 - 3x + 4 = (x + 1)(ax + b)$.

Alors en particulier, pour $x = -1$, $8 = 0$, ce qui est impossible.

Nous avons donc démontré par l'absurde qu'il n'est pas possible de trouver a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 3x + 4 = (x + 1)(ax + b)$.

Exercice 6 pour s'entraîner.

Exercice 7 pour s'entraîner.

Développez, ordonnez puis réduisez les expressions polynomiales.

$P1(X) = (3X + 4)(X - 5),$ $P2(X) = 12(X - 3) - 14(X + 4),$ $P3(X) = 11(X - 9) - 7(X - 1),$ $P4(X) = 28X(3X^2 - 4X + 12),$ $P5(X) = 3,2X^2(5X^2 - 12X - 1,1),$ $P6(X) = [(2X^2 - 2X + 3) - (2X^2 + 3)](5X^2 - 4X + 3),$ $P7(X) = -2X(3X - X + 2),$ $P8(X) = 5X(X - 3),$ $P9(X) = 3X^2(2X^2 - X + 4),$ $P10(X) = (X + 3)(X + 4),$ $P11(X) = (2X + 1)(X + 2),$ $P12(X) = (3X - 2)(2X + 3),$ $P13(X) = (X - 5)(X - 2),$ $P14(X) = (2X - 1)(4X + 3),$ $P15(X) = (2X - 7)^2,$ $P16(X) = (5X - 2)(X + 4),$ $P17(X) = (3X + 1,5)(2X - 3),$ $P18(X) = (5X - 7)(0,5X - 1,2),$ $P19(X) = (2X - 1,1)(X + 4),$ $P20(X) = (X - 7)(X + 7),$	$P21(X) = (2X - 3)^2,$ $P22(X) = (3X - 1)(5X - 2) + (X + 2)^2,$ $P23(X) = (5X - 3)(3X + 1) - (2X - 4)(-X + 5),$ $P24(X) = (1,5X - 5)(1,5X + 5) - (X - 1)^2,$ $P25(X) = (5X + 2)^2 - (X - 3)^2,$ $P26(X) = (3X - 2)^2 - (5 - 4X)(4 - 6X),$ $P27(X) = (X - 1)(2X + 3) + (X - 1)(X + 2),$ $P28(X) = (2X - 5)(2X + 5),$ $P29(X) = (3X + 1)(7X - 2) + (X - 2)^2,$ $P30(X) = (4X - 3)(3X + 2) - (2X + 5)(X - 3),$ $P31(X) = (1,5X - 2)(1,5X + 2) - (X + 3)^2,$ $P32(X) = (3X - 2)^2 - (X - 4)^2,$ $P33(X) = (3X + 1)^2 - (5 - 4X)(2 + 3X),$ $P34(X) = (X - 1)(2X + 2) + (X - 1)(2X + 2),$ $P35(X) = (X + 1)(X - 3) + (X + 1)(3X + 1),$ $P36(X) = (2X - 4)(X - 1) - (X - 2)(3X + 2),$ $P37(X) = (X - 3)(X + 2) - (X - 2)(2X + 1),$ $P38(X) = (X + 1)(X - 4) - (2X + 8)(X + 5),$ $P39(X) = (3X - 2)^2 - (5X - 4)(2 + 3X),$ $P40(X) = (X + 2)(2X - 3) + (X - 1)(X + 2).$
--	--

Correction exercice 7

1. $P_1(X) = 3X^2 - X - 20$
2. $P_2(X) = -2X - 92$
3. $P_3(X) = 4X - 92$
4. $P_4(X) = 54X^3 - 112X^2 + 336X$
5. $P_5(X) = 16X^4 - 38,4X^3 - 3,52X^2$
- 6.

Exercice 8

Il s'agit de l'exercice type à connaître dans cette leçon.

Démontrez les égalités proposées, valables pour tout x réel.

1. $(-2x + 8)(x - 7) = -2x^2 + 22x - 56$,
2. $-9 + 6x + 3x^2 = -3(1 - x)(x + 3)$,
3. $-3(x - 3)^2 + 3 = -3(x - 4)(x - 2)$.

Correction exercice 8Exercice 9 ★

À la calculatrice, une instruction $x \wedge 3$ compte pour 2 multiplications : $x \wedge 3 = x \times x \times x$.

1. **Premier exemple.**

Soit $f(x) = x^2 + 4x + 3$ sur \mathbb{R} (forme A).

- (a) Vérifiez que $f(x) = 3 + x(x + 4)$ pour tout x réel (forme H).
- (b) Combien d'opérations sont é effectuer avec la forme A ? avec la forme H ?
- (c) On programme le calcul de $f(x)$ pour x variant de 0 à 2 avec un pas de 0,1. Combien d'opérations sont nécessaires avec chacune des deux formes ?

2. **Deuxième exemple.**

Reprendre les questions a , b et c de la question 1 pour $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ (forme A) et $f(x) = -1 + x(4 + x(-3 + x(2 + x)))$ (forme H).

3. **Troisième exemple.**

Soit $f(x) = 4x^7 + 2x^6 + 3x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$.

- (a) Proposer la forme H associée.
 - (b) Reprendre les questions 1(b) et 1(c).
4. Quel est le gain obtenu en nombre d'opérations pour $f(x) = x^{50} + x^{49} + x^{48} + \dots + x^2 + x + 1$?

On pourra programmer un algorithme pour effectuer un calcul de ce gain.

Correction exercice 9

Cette méthode qui permet d'économiser les calculs et donc d'accélérer les programme informatiques est appelé l'*algorithme de Hörner*.

Exercice 10 pour s'entraîner.

Soit x un nombre réel différent de 1, démontrez que

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{1 - x^5}{1 - x}.$$

Correction exercice 10

Il est possible d'utiliser le produit en croix.

Démontrer :

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{1 - x^5}{1 - x}$$

équivalent à démontrer :

$$(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(1 - x) = \frac{1 - x^5}{1 - x}(1 - x)$$

Or :

$$\begin{aligned} & (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(1 - x) \\ &= 1 \times x^4 + 1 \times x^3 + 1 \times x^2 + 1 \times x + 1 \times 1 - x \times x^4 + x \times x^3 - x \times x^2 - x \times x - x \times 1 = 1 - x^5 \end{aligned}$$

IV Ce qu'il faut retenir.

1. Présenter une expression polynomiale sous forme développée, réduite et ordonnée.
2. Les méthodes, techniques pour développer : distributivité, double distributivité, identités remarquables.

V Exercices Wims.

- 2ieme_algebre_07_000_developper
- 2ieme_algebre_07_001_developper
- 2ieme_algebre_07_002_developper
- 2ieme_algebre_07_003_developper

- 2ieme_algebre_07_004_developer
- 2ieme_algebre_07_005_developer
- 2ieme_algebre_07_006_developer
- 2ieme_algebre_07_007_developer
- 2ieme_algebre_07_008_developer
- 2ieme_algebre_07_009_developer
- 2ieme_algebre_07_010_developer
- 2ieme_algebre_07_011_developer
- 2ieme_algebre_07_012_developer
- 2ieme_algebre_07_013_developer