

## Inégalités.

### Des rappels.

### Inéquations.

EXERCICE 1. Donnez l'ensemble des solutions des inéquations.

- a)  $x < -1$ .      b)  $3 \geq x$ .      c)  $\frac{1}{2} \leq x$ .      d)  $-\sqrt{2} < x$ .      e)  $10^3 > x$ .  
f)  $x \leq 2,14$ .      g)  $x > \sqrt{\pi}$ .      h)  $x \geq -2,1$ .

### Les règles de manipulation.

### Somme d'inégalités.

### Produit d'inégalités.

### Exercices.

EXERCICE 2. Résolvez les inéquations. *Résoudre une inéquation c'est donner un ensemble.*

- a)  $2x - 3 < 0$ .      b)  $3x + 1 \geq 0$ .  
c)  $4x + 2 > -7x + 1$ .      d)  $-12x + 7 \leq 13$ .  
e)  $8x + 3 < -14x + 3$ .      f)  $12x - 3 \geq -6x + 9$ .  
g)  $-5x - 7 > 8 - 3x$ .      h)  $8x + 3 \geq 6 - 7x$ .

EXERCICE 3. Résolvez les inéquations. *Résoudre une inéquation c'est donner un ensemble.*

- a)  $-3x + 7 < x + 2$       b)  $-5x - 2 \leq 0$   
c)  $-x > 9$       d)  $-x + 5 \leq 7 - 6x$   
e)  $2(3 - x) \geq 8$       f)  $2x - 7 < (3x - 4) - x$   
g)  $3x - (4 + 3x) > 2$       h)  $(2x - 1)(2x + 3) \leq (2x + 4)^2$   
i)  $(x - 1)(3 - x) > 7$ .

EXERCICE 4. Trouvez tous les nombres  $x$  qui vérifient les deux inéquations (système de deux équations à une inconnue) dans chaque cas :

- a)  $\begin{cases} x + 7 \leq 12 \\ x - 5 \geq -17 \end{cases}$       b)  $\begin{cases} 2x - 8 \leq 5x + 13 \\ 4x - 23 \leq 10 + x \end{cases}$   
c)  $\begin{cases} 2x - 8 \geq 5x + 13 \\ 4x - 23 \geq 10 + x \end{cases}$       d)  $\begin{cases} 2x - 8 \leq 5x + 13 \\ 4x - 23 \geq 10 + x \end{cases}$

EXERCICE 5.

- (a) Résolvez l'équation  $8x - 4 = 0$ .  
(b) Résolvez l'inéquation  $8x - 4 \geq 0$ .
- Parfois on ne précise pas l'ensemble de définition d'une fonction  $g$ . Dans ce cas l'ensemble des définition est l'ensemble des nombres  $x$  pour lesquels  $g(x)$  existe. Déduisez de la question 1 les ensembles de définition des fonctions suivantes.

- (a)  $g : x \mapsto \frac{1}{8x - 4}$ .  
(b)  $h : x \mapsto \sqrt{8x + 4}$ .

EXERCICE 6. Un particulier a des marchandises à faire transporter. Un premier transporteur lui demande 460 € au départ et 3,50 € par kilomètre. Un second transporteur lui demande 1000 € au départ et 2 euro par kilomètre. Pour quelles distances à parcourir est-il plus avantageux de s'adresser au second transporteur ?

EXERCICE 7. Une société veut imprimer des livres. La location de la machine revient à 750 € par jour et les frais de fabrication s'élèvent à 3,75 € par livre. Combien faut-il imprimer de livre par jour pour que le prix de revient d'un livre soit inférieur ou égal à 6 €.

EXERCICE 8. Deux entreprises de transport proposent les tarifs suivants :

- 110 € au départ plus 1,26 € du kilomètre ;
- 120 € au départ plus 1,22 € du kilomètre.

Pour quels kilométrages le tarif du second transporteur est-il plus avantageux ?

EXERCICE 9. Un libraire vend des crayons 2,4 € pièce. Sur ces articles ses frais s'élèvent à 0,6 € par crayon auxquels il faut ajouter une somme fixe de 34,2 €. Calculez, en fonction de  $x$ , le bénéfice réalisé par la vente de  $x$  crayons. Combien doit-il vendre de crayons pour que le bénéfice soit compris entre 68,4 € et 102,6 € ?

EXERCICE 10.

1. En utilisant le développement de  $(a-b)^2$  démontrez que  $2ab \leq a^2 + b^2$  (1). Déduisez-en que  $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ .
2.  $a$ ,  $b$  et  $c$  des nombres quelconques. Écrivez deux autres inégalités analogues à l'inégalité (1). Déduisez-en que :  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$ .

EXERCICE 11. Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois nombres réels.

1. Écrivez sous forme de fraction :  $\frac{a+c}{b+c} - \frac{a}{b}$ .
2. Comparez  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{a+c}{b+c}$  pour
  - (a)  $c > 0$  et  $0 < a < b$  ;
  - (b)  $c > 0$  et  $0 < b < a$ .
3. Déduisez-en une comparaison de  $\frac{2}{5}$  et  $\frac{2+\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}$  puis  $\frac{\sqrt{11}+\sqrt{17}}{\sqrt{3}+\sqrt{17}}$ .

EXERCICE 12. Montrez que si  $a$  et  $b$  sont strictement positifs alors  $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ .

EXERCICE 13. L'arête d'un cube a pour mesure  $a$ .

1. Comparez le volume  $V$  du cube à celui  $V_1$  d'une sphère de diamètre  $a$ , puis à celui  $V_2$  d'une sphère de diamètre  $a\sqrt{3}$ . Interprétez géométriquement les résultats.
2. À quelle condition doit satisfaire le réel positif  $\alpha$  pour que la sphère de diamètre  $\alpha a$  ait un volume supérieur ou égale à celui du cube ?

EXERCICE 14. A l'aide de la calculatrice résolvez les inéquations.

- a)  $4x^2 + 2x \geq 8$ . b)  $\frac{1}{x} \geq x + 1$ .