Résoudre une inéquation.

I Généralités sur les inéquations.

II Règle de manipulation des inéquations.

1 Presque comme les équations.

Exercice 1.

Résolvez les inéquations.

1. $-3x + 7 < x + 2$
2. $-5x - 2 \leq 0$
3. $-x > 9$
4. $2x - 7 < (3x - 4) - x$
5. $3x - (4 + 3x) > 2$

2 Système d'inéquations.

Exercice 2.

Trouvez tous les nombres x qui vérifient les deux inéquations suivantes (système de deux équations à une inconnue) :

$$\begin{cases} x + 7 \leq 12 \\ x - 5 \geq -17 \end{cases}$$

Exercice 3.

Résolvez les systèmes d'inéquations.

1. $\begin{cases} 2x - 8 \leq 5x + 13 \\ 4x - 23 \leq 10 + x \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x - 8 \geq 5x + 13 \\ 4x - 23 \geq 10 + x \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x - 8 \leq 5x + 13 \\ 4x - 23 \geq 10 + x \end{cases}$

3 Ajouter des inégalités membre à membre.

III Étude du signe des fonctions affines.

Exercice 4.

Donnez le tableau de signe de f définie sur l'intervalle I dans les différents cas proposés.

1. $f(x) = 2x + 4$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = 5x - 15$, $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = -7x + 14$, $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = -13x - 39$, $I = \mathbb{R}$.
5. $f(x) = x + 7$, $I = \mathbb{R}$.
6. $f(x) = x - \pi$, $I = \mathbb{R}$.
7. $f(x) = -x + \sqrt{2}$, $I = \mathbb{R}$.
8. $f(x) = -x - 2$, $I = \mathbb{R}$.
9. $f(x) = 3x + 7$, $I = \mathbb{R}$.
10. $f(x) = 5x - 4$, $I = \mathbb{R}$.
11. $f(x) = -4x + 13$, $I = \mathbb{R}$.
12. $f(x) = -3x - 4$, $I = \mathbb{R}$.
13. $f(x) = 5x + 12$, $I =]-\infty; -3[$.
14. $f(x) = 6x - 8$, $I = [-12; 10]$.
15. $f(x) = -8x + 12$, $I = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$.
16. $f(x) = -3x - 24$, $I =]-8; 10[$.

IV Des inéquations produit-nul.

Exercice 5.

Essayez de résoudre, dans l'ensemble des réels, les inéquations d'inconnue x.

$$\begin{array}{ll} (E_1) & -3x + 1 < 0 \\ (E_2) & 2(x-3)(-7x+14) > 0 \end{array}$$

1 Étude du signe d'une fonction factorisée.

Exercice 6.

Étudiez le signe de la fonction f définie sur $[-10; 10]$ par, pour tout $x \in [-10; 10]$

$$f(x) = (3x - 7)x^2(-x + 1)$$

Exercice 7.

Étudiez le signe de $g : \left\{ \begin{array}{ccc} [-6; 4] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x+4)(-x+2) \end{array} \right.$

2 Inéquation produit-nul.

Exercice 8.

Résolvez l'inéquation $-2(x+1)(-7-x) \geqslant 0$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 9.

1. $(x-5)(-2x+6) \geqslant 0$
2. $(3x-5)(x+4) > 0$
3. $(x+3)(-x+6) \leqslant 0$
4. $(-x+4)(3x+2) > 0$
5. $(10x+5)(-3x+4) > 0$
6. $(x-4)(3-x) \leqslant 0$
7. $(-2x+3)(5+x) > 0$
8. $3x(3x-5) < 0$
9. $-(x+1)^2(2x-1) \geqslant 0$
10. $-2x(x-1)(4-x) \leqslant 0$
11. $x^2(4-x)(-2x+1) > 0$
12. $x^3(x+1) < 0$
13. $(x^2+1)(x-1) \geqslant 0$
14. $(x-2)(4-x) < 0$
15. $\left(\frac{3}{4}-x\right)\left(x-\frac{7}{6}\right) \geqslant 0$
16. $(x+\sqrt{3})(x-4) \geqslant 0$
17. $(3x-7)(7-3x) \leqslant 0$

3 Inéquation se ramenant à une inéquation produit-nul.

Exercice 10. ☯

Justifiez que les inéquations suivantes sont équivalentes

$$(2x-4)(x+5)+x > -5 \text{ et } (2x-3)(x+5) > 0$$

puis résolvez l'inéquation $(2x-4)(x+5)+x > -5$.

Exercice 11. ⚽

Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 \leqslant 16$.

Exercice 12. ⚽

Résolvez les inéquation suivantes dans l'ensemble des réels.

1. $x^2-4x \leq -2x-1$
2. $3x(x+3)-(x+3)^2 \leq 0$
3. $x^3+2x^2+x \geq 0$
4. $x(x+6) > 3(x+6)$
5. $2x(x-3)+3x-9 < 6x-18$
6. $x^2(1-3x)+4(6x-2) \geq 0$
7. $(1-2x)x-4x(x+6) \leq 0$
8. $7-x^2 < 2x-2\sqrt{7}$
9. $(x^2-1)+2x-2 > 6x-6$
10. $x^2 \leq 10$
11. $x^2 \leq -16$
12. $x^2 \leq 0$
13. $x^2 < 8$
14. $x^2 \leq 144$
15. $x^2 \leq 20$
16. $x^2-4+(x+2)(2x+5) < 0$
17. $(x+1)(x-3) \geq x^2-9$
18. $4x-4+(x-1)(x-4)+x^2-1 > 0$
19. $(x+5)^2 \leq (x+5)(x+3)$
20. $(2x-1)(x+3) \geq \left(x-\frac{1}{2}\right)(x+6)$

4 Inéquation quotient.

Exercice 13. ☯

Résolvez l'inéquation $\dfrac{-x+1}{-2x+8} > 0$.

Exercice 14. ⚽

Résolvez les inéquations dans $\mathbb{R}$.

1. $\dfrac{2x-4}{x+2} \leqslant 0$
2. $\dfrac{-2x+8}{3x-2} \leqslant 0$
3. $\dfrac{2x+4}{x-1} - 2 \geq 0$
4. $\dfrac{2x+4}{x+1} < 3$
5. $\dfrac{2x+3}{x+1} \leq \dfrac{x-6}{x+1}$
6. $1 < \dfrac{2x+10}{-x+3}$
7. $\dfrac{x+3}{2x-1} \geq 0$
8. $\dfrac{2-x}{5-2x} \leq 0$
9. $\dfrac{3x-1}{-x+5} > 0$
10. $\dfrac{5x(x-2)}{4x+1} < 0$
11. $\dfrac{2x^2}{(-x+1)(x+3)} \geq 0$
12. $\dfrac{-x(x-4)}{2+x^2} \leq 0$
13. $\dfrac{(x+1)(x-2)}{3-x} > 0$
14. $\dfrac{9-4x}{11-5x} < 0$
15. $\dfrac{-5+4x}{2x-1} \geq 0$
16. $\dfrac{x+1}{3-x} \leq 0$
17. $\dfrac{7-2x}{2x-1} > 0$
18. $\dfrac{-5x}{(2x-7)^2} < 0$
19. $\dfrac{1+2x^2}{7-x} \geq 0$
20. $\dfrac{x+4}{5-x} < 2$

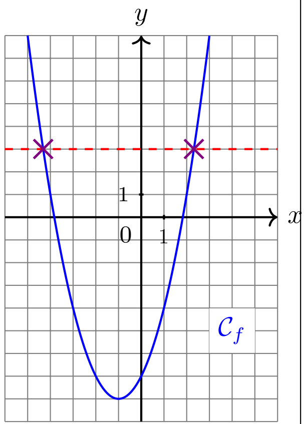
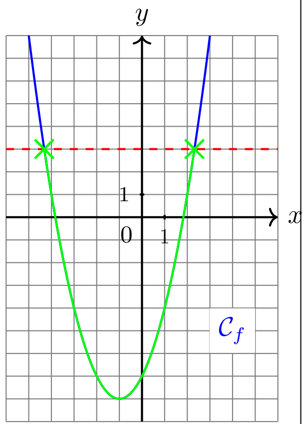
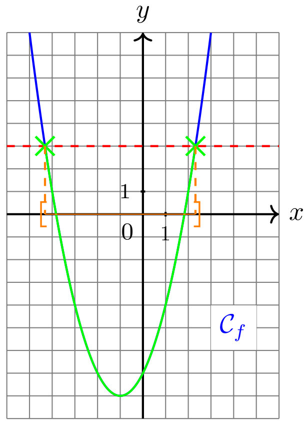
V Conjecturer graphiquement les solutions d'une inéquation.

1 "Résolution graphique" d'inéquation : $f(x) \leq a$ (avec $a \in \mathbb{R}$).

Pour conjecturer les solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 7 \leq 3$ nous introduisons encore la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x - 7 \end{array}$ puis traçons sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ avec un logiciel.

Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq 3$ sont les abscisses des points de la courbe d'ordonnée plus petite ou égale à 3.

Les étapes de la recherche sont les suivantes :

1	2	3
Dessinez l'ordonnée 3.	Identifiez les points de la courbe dont l'ordonnée est plus petite que 3.	Lire les abscisses correspondantes.
		

Enfin donnez les solutions sous forme d'ensemble : l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 7 \leq 3$ est $[-4{,}3\ ;\ 2{,}3]$.

Remarquons enfin que si l'inégalité avait été stricte ($x^2 + 2x - 7 < 3$) l'ensemble des solutions eut été ouvert ($]-4{,}3\ ;\ 2{,}3[$).

Exercice 15. ☯

Exercice 32 page 104 du manuel Sesamath : résolution d'inéquations, réunion, ouverts, fermés.

Exercice 16. ⚽

Exercice 31 page 104 du manuel Sesamath : résolution d'inéquations.

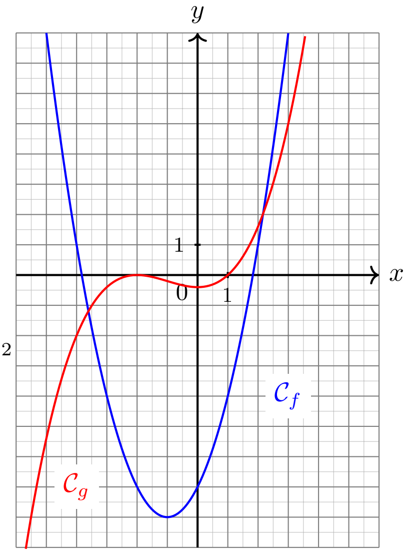
2 "Résolution graphique" d'inéquation : $f(x) \leq g(x)$.

Pour conjecturer les solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 7 \leq 0{,}1(x + 2)^3 - 0.3(x + 2)^2$ nous introduisons encore les fonctions

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x - 7 \end{array} \quad \text{et}$$

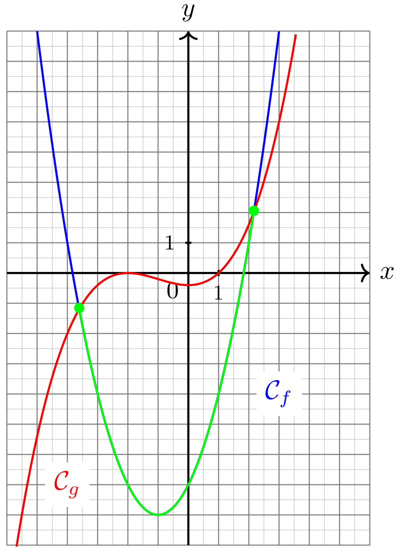
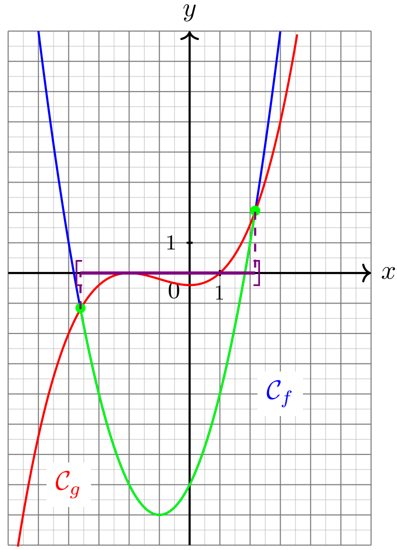
$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0{,}1(x + 2)^3 - 0.3(x + 2)^2 \end{array}$$

puis traçons leurs courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ avec un logiciel.



Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ situés en dessous de ceux de la courbe $\mathcal{C}_g$.

Les étapes de la recherche sont les suivantes :

1	2
Identifiez les points de $\mathcal{C}_f$ situés en dessous de ceux de $\mathcal{C}_g$. 	Lire les abscisses correspondantes. 

Enfin donnez les solutions sous forme d'ensemble : l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 7 \leq 0{,}1(x+2)^3 - 0.3(x+2)^2$ est $[-3{,}6\ ;\ 2{,}2]$.

Exercice 17. ⚽
Exercice 33 page 105 du manuel Sesamath : résolution d'inéquations.

Exercice 18. ⚽
Exercice 35 page 105 du manuel Sesamath : résolution d'inéquations.

VI Exercices.

Exercice 19. ⚽
Deux entreprises de transport proposent les tarifs suivants :
- 110 € au départ plus 1,26 € du kilomètre ;
- 120 € au départ plus 1,22 € du kilomètre.

Pour quels kilométrages le tarif du second transporteur est-il plus avantageux ?

Exercice 20.

Un libraire vend des crayons 2,4 € pièce. Sur ces articles ses frais s'élèvent à 0,6 € par crayon auxquels il faut ajouter une somme fixe de 34,2 €.
Calculez, en fonction de x, le bénéfice réalisé par la vente de x crayons. Combien doit-il vendre de crayons pour que le bénéfice soit compris entre 68,4 € et 102,6 € ?

Exercice 21.

Résolvez les inéquations suivantes.

1. $2x > 7x - 1$
2. $-4x - 10 \geq 2 - 4x$
3. $2x^2 < 2(x-7)^2$
4. $x^2 < 25$
5. $(x+3)^2 < -1$
6. $(x-6)^2 > 16$
7. $(2x - \sqrt{3})(2x+6) > 0$
8. $\frac{36-12x}{x-3} \leq 0$
9. $x^2 - 5 < (x+\sqrt{5})(x-2)$
10. $x^2 - 25 + (x-5)(6-x) \leq 0$

Exercice 22.

1. Résolvez l'inéquation $\dfrac{2x+3}{x-1} \geq 4$.
2. Comment vérifier graphiquement ce résultat ?

Exercice 23.

Une entreprise fabrique et vend de la pâte à papier. Le coût de production de q tonnes de pâte à papier est donné, en milliers d'euros par

$$C(q) = 0{,}02q^2 + 0{,}1q + 9$$

pour $q \in [0; 80]$.
La recette, en milliers d'euros, engendrée par la vente de q tonnes de pâte à papier est donnée par

$$R(q) = 1{,}2q$$

1. (a) Quel est le coût le fabrication d'une tonne de pâte à papier ?
   (b) Quel est prix de vente d'une tonne de pâte à papier ?
   (c) L'entreprise est-elle bénéficiaire lorsqu'elle vend et produit une tonne de pâte à papier ?
2. Avec la calculatrice conjecturez pour quelles quantités de pâte à papier l'entreprise est bénéficiaire.
3. Démontrez que le bénéfice, en milliers d'euros, réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend q tonnes de pâte à papier est

$$B(q) = -0{,}02q^2 + 1{,}1q - 9$$

4. Démontrez que $B(q) = -0{,}02(q-45)(q-10)$ quelque soit $q \in [0; 80]$.
5. Déterminez pour quelles quantités de pâte à papier l'entreprise est bénéficiaire.

Exercice 24.

Une entreprise fabrique un produit. Pour une période donnée, le coût total de production, en euros, est donné en fonction du nombre q d'articles fabriqués par : $C(q) = 2q^2 + 10q + 900$ pour $0 < q < 80$.
Tous les articles fabriqués sont vendus. la recette totale en euros est donnée par $R(q) = 120q$.

1. Vérifiez que le bénéfice total est donné par $B(q) = -2(q^2 - 55q + 450)$.
   Puis que la forme factorisée de $B(q)$ est : $B(q) = -2(q-10)(q-45)$.
2. Pour quels nombres d'articles produit la production est-elle rentable ?

Exercice 25. ⚽

Une entreprise fabrique et vend un produit. On note $f(x)$ le coût de production, exprimé en milliers d'euros, de x tonnes de ce produit.
Pour $0 \leq x \leq 11$, des études ont montré que : $f(x) = x^3 - 12x^2 + 50x$.
L'entreprise vend son produit 30 000 € la tonne. On note $g(x)$ la recette exprimée en milliers d'euros et $B(x)$ le bénéfice : $B(x) = g(x) - f(x)$.

1. Exprimez $g(x)$ en fonction de x.
2. Développez, réduisez et ordonnez $B(x)$.
3. Développez, réduisez et ordonnez $(x - 2)(x - 10)$.
4. Résolvez l'inéquation $B(x) > 0$.
5. Interprétez le résultat de la question précédente.

Exercice 26.

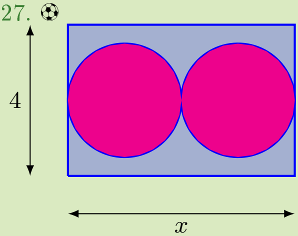
Soient f et g des fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 \text{ et } g(x) = 2x + 1$$

1. Vérifiez que pour tout réel x, $f(x) - g(x) = (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$.
2. Résolvez l'inéquation $f(x) < g(x)$.

Exercice 27. ⚽

Soit un réel x dans $[0; 8]$. On considère un rectangle de dimension 4 cm sur x cm, dans lequel on trace deux disques de même rayon comme sur la figure ci-contre.



On souhaite déterminer les valeurs de x de façon que l'aire bleue (ce qu'il reste du rectangle) soit supérieure à l'aire rose (les deux disques).

1. Montrez que le problème se ramène à la résolution de l'inéquation $\dfrac{\pi x^2}{8} \leq 2x$ sur $[0; 8]$.
2. Montrez que l'ensemble des solutions est $\left[0; \dfrac{16}{\pi}\right[$.

Exercice 28.

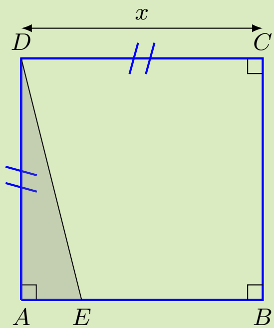
Exercice 29.

Exercice 30.

$ABCD$ est un carré de côté x, exprimé en cm, avec $x > 6$. E est le point du segment $[AB]$ tel que

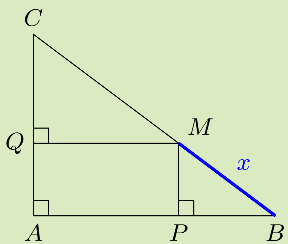
$$EB = 6 \text{ cm}$$

1. Exprimez en fonction de x, l'aire en cm^2 du triangle AED.
2. Peut-on trouver x pour que l'aire du carré $ABCD$ soit strictement supérieure au triple de l'aire du triangle AED ?



Exercice 31.

ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AB = 8$ et $AC = 6$. M est un point de l'hypoténuse $[BC]$.
Par M, on trace les perpendiculaires à (AB) et (AC). Elles coupent $[AB]$ et $[AC]$ respectivement en P et Q.
On pose $BM = x$.
On se propose d'étudier quelques propriétés du périmètre du rectangle $APMQ$.

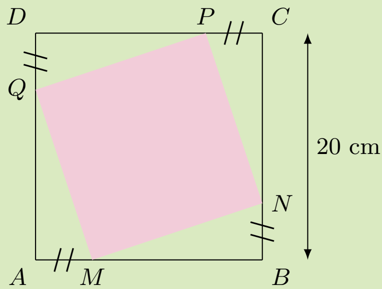


1. Démontrez que $MP = 0{,}6x$ et $MQ = 8 - 0{,}8x$.
2. Exprimez, en fonction de x, le périmètre $p(x)$ du rectangle $APMQ$.
3. Pour quelles positions de M le périmètre est-il supérieur ou égale à 13,5 ?
4. Comparez le périmètre de $AMPQ$ au demi-périmètre du triangle ABC.

Exercice 32.

Dans un carré $ABCD$ de côté 20 cm, on inscrit un carré $MNPQ$ suivant le schéma ci-contre.

On pose $x = AM = BN = CP = DQ$ avec $0 \leq x \leq 20$.



Le but de cet exercice est de déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire du carré $MNPQ$ dépasse 272 cm^2.

1. Exprimez l'aire en cm^2, $g(x)$ du carré $MNPQ$ en fonction de x, sous forme développée, ordonnée et réduite.
2. Prouvez que $g(x) > 272$ équivaut à
$$2x^2 - 40x + 128 > 0.$$
3. On note $f(x) = 2x^2 - 40x + 128$. Affichez sur votre calculatrice la courbe représentative de f, tracez à main levée la courbe observée puis conjecturez les solutions du problème.
Pour la fenêtre on utilisera les paramètres d'affichages suivants.
Axe des abscisses : $0 \leq x \leq 20$.
Axe des ordonnées : $-100 \leq y \leq 200$.
4. On se propose de retrouver le résultat par le calcul.
   (a) Vérifiez que $f(x) = (8 - 2x)(16 - 2x)$.
   (b) Étudiez le signe de $f(x)$.
   (c) Déduisez-en les solutions du problème.