Résoudre une inéquation.

I Généralités sur les inéquations.

II Règle de manipulation des inéquations.

1 Presque comme les équations.

Exercice 1. ☯

Résolvez les inéquations.

1. $-3x+7<x+2$
2. $-5x-2\leq 0$
3. $-x>9$
4. $2x-7<(3x-4)-x$
5. $3x-(4+3x)>2$

Correction de l'exercice 1

1.

$$\begin{aligned}-3x+7<x+2 &\iff -3x+7-x<x+2-x\\ &\iff -4x+7<2\\ &\iff -4x+7-7<2-7\\ &\iff -4x<-5\\ &\iff \frac{-4x}{-4}>\frac{-5}{-4}\\ &\iff x>\frac{5}{4}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S}=\left]\frac{5}{4};+\infty\right[$.

2.

$$\begin{aligned}-5x-2\leq 0 &\iff -5x-2+2\leq 0+2\\ &\iff -5x\leq 2\\ &\iff \frac{-5x}{-5}\geq\frac{2}{-5}\\ &\iff x\geq -\frac{2}{5}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S}=\left[-\frac{2}{5};+\infty\right[$.

3.

$$\begin{aligned}-x>9 &\iff \frac{-x}{-1}<\frac{9}{-1}\\ &\iff x<-9\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S}=]-\infty;-9[$.

4.

$$\begin{aligned} 2x-7<(3x-4)-x &\iff 2x-7<3x-4-x \\ &\iff 2x-7<2x-4 \\ &\iff 2x-7-2x<2x-4-2x \\ &\iff -7<-4 \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est toujours vraie, quelque soit la valeur choisie pour x. Donc :
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S}=\mathbb{R}$.

5.

$$\begin{aligned} 3x-(4+3x)>2 &\iff 3x-4-3x>2 \\ &\iff -4>2 \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est toujours fausse, quelque soit la valeur choisie pour x. Donc :
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S}=\varnothing$.

2 Système d'inéquations.

Exercice 2. ☯

Trouvez tous les nombres x qui vérifient les deux inéquations suivantes (système de deux équations à une inconnue) :
$\begin{cases} x+7\leq 12 \\ x-5\geq -17 \end{cases}$

Exercice 3. ⚽

Résolvez les systèmes d'inéquations.

1. $\begin{cases} 2x-8\leq 5x+13 \\ 4x-23\leq 10+x \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x-8\geq 5x+13 \\ 4x-23\geq 10+x \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x-8\leq 5x+13 \\ 4x-23\geq 10+x \end{cases}$

Correction de l'exercice 3

1. L'ensemble des solutions de $2x-8\leq 5x+13$ est $\mathcal{S}_1=[-7;+\infty[$.
   L'ensemble des solutions de $4x-23\leq 10+x$ est $\mathcal{S}_2=]-\infty;11]$.
   L'ensemble des solutions du système d'inéquation est $\mathcal{S}_1\cap\mathcal{S}_2=[-7;+\infty[\cap]-\infty;11]=[-7;11]$.
2. L'ensemble des solutions de $2x-8\geq 5x+13$ est $\mathcal{S}_1=]-\infty;-7]$.
   L'ensemble des solutions de $4x-23\geq 10+x$ est $\mathcal{S}_2=[11;+\infty[$.
   L'ensemble des solutions du système d'inéquation est $\mathcal{S}_1\cap\mathcal{S}_2=]-\infty;-7]\cap[11;+\infty[=\varnothing$.

3. L'ensemble des solutions de $2x - 8 \leq 5x + 13$ est $\mathcal{S}_1 = [-7; +\infty[$.
   L'ensemble des solutions de $4x - 23 \geq 10 + x$ est $\mathcal{S}_2 = [11; +\infty[$.
   L'ensemble des solutions du système d'inéquation est $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = [-7; +\infty[\cap [11; +\infty[= [11; +\infty[$.

3 Ajouter des inégalités membre à membre.

III Étude du signe des fonctions affines.

Exercice 4. ⚽

Donnez le tableau de signe de f définie sur l'intervalle I dans les différents cas proposés.

1. $f(x) = 2x + 4$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = 5x - 15$, $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = -7x + 14$, $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = -13x - 39$, $I = \mathbb{R}$.
5. $f(x) = x + 7$, $I = \mathbb{R}$.
6. $f(x) = x - \pi$, $I = \mathbb{R}$.
7. $f(x) = -x + \sqrt{2}$, $I = \mathbb{R}$.
8. $f(x) = -x - 2$, $I = \mathbb{R}$.
9. $f(x) = 3x + 7$, $I = \mathbb{R}$.
10. $f(x) = 5x - 4$, $I = \mathbb{R}$.
11. $f(x) = -4x + 13$, $I = \mathbb{R}$.
12. $f(x) = -3x - 4$, $I = \mathbb{R}$.
13. $f(x) = 5x + 12$, $I =]-\infty; -3[$.
14. $f(x) = 6x - 8$, $I = [-12; 10]$.
15. $f(x) = -8x + 12$, $I = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$.
16. $f(x) = -3x - 24$, $I =]-8; 10[$.

<u>Correction de l'exercice 4</u>

1.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

3.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

4.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

5.

x	$-\infty$		-7		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

6.

x	$-\infty$		π		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

7.

x	$-\infty$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

8.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

9.

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

10.

x	$-\infty$		$\frac{4}{5}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

11.

x	$-\infty$		$\frac{13}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

12.

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

13.

x	$-\infty$		-3		$-\frac{12}{5}$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

14.

x	-12		$\frac{4}{3}$		10
$f(x)$		$-$	0	$+$	

15.

x	$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	0	$-$	

16.

x	-8 $\qquad$ 10
$f(x)$	$\Vert$ $-$ $\Vert$

IV Des inéquations produit-nul.

Exercice 5.

Essayez de résoudre, dans l'ensemble des réels, les inéquations d'inconnue x.

$$\begin{array}{ll}(E_1) & -3x+1<0\\ (E_2) & 2(x-3)(-7x+14)>0\end{array}$$

1 Étude du signe d'une fonction factorisée.

Exercice 6.

Étudiez le signe de la fonction f définie sur $[-10;10]$ par, pour tout $x \in [-10;10]$

$$f(x)=(3x-7)x^2(-x+1)$$

Correction de l'exercice 6

La fonction f est un produit de trois fonctions : $g(x)=3x-7$, $h(x)=x^2$ et $k(x)=-x+1$ quelque soit x dans $[-10;10]$. Pour étudier le signe de f nous allons donc rechercher le signe de ces trois fonctions.

1. Étudions le signe de $g(x)=3x-7$ sur $[-10;10]$.

   g est une fonction affine de la forme $g(x)=ax+b$ avec $a=3$ et $b=-7$. Puisque son coefficient directeur a est strictement positif nous pouvons affirmer que

   - g s'annule en $-\frac{b}{a}=-\frac{-7}{3}=\frac{7}{3}$.
   - g est strictement négative sur $\left[-10;\frac{7}{3}\right[$.
   - g est strictement positive sur $\left]\frac{7}{3};10\right]$.

2. Étudions le signe de $h(x)=x^2$ sur $[-10;10]$.

   h est la restriction de la fonction carrée à l'intervalle $[-10;10]$, donc, d'après le cours

   - $h(x)>0$ si et seulement si $x \in [-10{,}0[\cup]0{,}10]$.
   - $h(x)=0$ si et seulement si $x=0$.

3. Étudions le signe de $k(x) = -x + 1$ sur $[-10; 10]$.

   k est une fonction affine de la forme $k(x) = ax + b$ avec $a = -1$ et $b = 1$. Puisque son coefficient directeur a est strictement négatif nous pouvons affirmer que

   . k s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{1}{-1} = 1$.
   . g est strictement positive sur $[-10; 1[$.
   . g est strictement négative sur $]1; 10]$.

Nous regroupons à présent le signe des trois facteurs dans un unique tableau de signe. Pour cela il faut suivre les étapes suivantes.

1. Les lignes : x, les facteurs $g(x) = 3x - 7$, $h(x) = x^2$, $k(x) = -x + 1$, et leur produit $f(x)$.
2. Indiquer l'ensemble de définition de x : $[-10,10]$.
3. Les valeurs de x qui annulent les facteurs g, h ou k (placés dans l'ordre croissant). Ces valeurs indiquent les colonnes du tableau. Puis les zéros en dessous indiquant le facteur qu'elles annulent.
4. Puis on complète les lignes de signes du tableau grâce aux résolutions d'équations et inéquations faites précédemment.
   Par exemple : $g(x) > 0$ si et seulement si $x \in \left]\frac{7}{3},10\right]$, on place donc des signes + après le zéro de la ligne.
5. Il est alors possible de compléter la dernière ligne de signe en utilisant la règle sur le signe d'un produit. Par exemple, pour $x \in [-10,0[$, $3x - 7$ est négatif, x^2 est positif et $-x + 1$ est positif donc leur produit est négatif.

x	-10		0		1		$\frac{7}{3}$		10
$3x - 7$		$-$		$-$		$-$	0	+	
x^2		+	0	+		+		+	
$-x + 1$		+		+	0	$-$		$-$	
$f(x)$		$-$	0	$-$	0	+	0	$-$	

La rédaction adoptée ci-dessus est très détaillée nous adopterons une rédaction un peu plus légère dans la pratique.

Exercice 7. ☯

Étudiez le signe de $g : \left\{ \begin{array}{ccc} [-6; 4] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x+4)(-x+2) \end{array} \right.$

Correction de l'exercice 7

Étudions le signe de g.

* $h : x \mapsto x+4$ est une fonction affine avec $a = 1$ et $b = 4$. h est strictement croissante car $a > 0$. h s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{4}{1} = -4$.
* $k : x \mapsto -x+2$ est une fonction affine avec $a = -1$ et $b = 2$. k est strictement décroissante car $a < 0$. k s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{2}{-1} = 2$.

Nous en déduisons :

x	-6		-4		2		4
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
g		$-$	0	$+$	0	$-$	

2 Inéquation produit-nul.

Exercice 8.

Résolvez l'inéquation $-2(x+1)(-7-x) \geqslant 0$ dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 8

Notons $f : x \mapsto -2(x+1)(-7-x)$ quelque soit x réel.

Nous devons trouver pour quelles valeurs de x $f(x)$ est positif ou nul.

Étudions le signe de f.

* -2 est strictement négatif.
* $x \mapsto x+1$ est une fonction affine avec $a = 1$ et $b = 1$, elle s'annule en -1 et, son coefficient directeur étant strictement positif elle est strictement croissante.
* $x \mapsto -7-x$ est une fonction affine avec $a = -1$ et $b = -7$, elle s'annule en $-\frac{-7}{-1} = -7$ et, son coefficient directeur étant strictement négatif, elle est strictement décroissante.

Nous en déduisons :

x	$-\infty$		-7		-1		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$-7-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $-2(x+1)(-7-x) \geqslant 0$ est
$\mathcal{S} =]-\infty; -7] \cup [-1; +\infty[$.

Exercice 9.

1. $(x-5)(-2x+6) \geqslant 0$
2. $(3x-5)(x+4) > 0$
3. $(x+3)(-x+6) \leqslant 0$
4. $(-x+4)(3x+2) > 0$
5. $(10x+5)(-3x+4) > 0$
6. $(x-4)(3-x) \leqslant 0$
7. $(-2x+3)(5+x) > 0$
8. $3x(3x-5) < 0$
9. $-(x+1)^2(2x-1) \geqslant 0$
10. $-2x(x-1)(4-x) \leqslant 0$
11. $x^2(4-x)(-2x+1) > 0$
12. $x^3(x+1) < 0$
13. $(x^2+1)(x-1) \geqslant 0$
14. $(x-2)(4-x) < 0$
15. $\left(\frac{3}{4}-x\right)\left(x-\frac{7}{6}\right) \geqslant 0$
16. $(x+\sqrt{3})(x-4) \geqslant 0$
17. $(3x-7)(7-3x) \leqslant 0$

Correction de l'exercice 9

Dans tous les cas nous noterons $P(x)$ l'expression factorisée (*i.e.* sous forme de produit).

Le corrigé ici ne détail pas l'étude du signe de chaque facteur.

1.

x	$-\infty$		3		5		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$-2x+6$		$+$	0	$-$		$-$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(x-5)(-2x+6) \geqslant 0$ est
$\mathcal{S} = [3; 5]$.

2.

x	$-\infty$		-4		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(3x-5)(x+4) > 0$ est $\mathcal{S} = \left]-\infty; 4\right[\cup \left]\frac{5}{3}; +\infty\right[$.

3.

x	$-\infty$		-3		6		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(x+3)(-x+6) \leqslant 0$ est $\mathcal{S} = \left]-\infty; -3\right] \cup \left[6; +\infty\right[$.

4.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		4		$+\infty$
$-x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
$3x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(-x+4)(3x+2) > 0$ est $\mathcal{S} = \left]-\frac{2}{3}; 4\right[$.

5.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$10x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$-3x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(10x+5)(-3x+4) > 0$ est $\mathcal{S} = \left]-\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\right[$.

6.

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$3-x$		$+$	0	$+-$		$-$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(x-4)(3-x) \leqslant 0$ est $\mathcal{S} =]-\infty; 3] \cup [4; +\infty[$.

7.

x	$-\infty$		-5		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$5+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(-2x+3)(5+x) > 0$ est $\mathcal{S} = \left]-5; \frac{3}{2}\right[$.

8.

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $3x(3x-5)<0$ est $\mathcal{S}=\left]0;\frac{5}{3}\right[$.

9.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
-1		$-$		$-$		$-$	
$(x+1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $-(x+1)^2(2x-1)\geqslant 0$ est $\mathcal{S}=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$.

10.

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$		$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$4-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $-2x(x-1)(4-x)\leqslant 0$ est $\mathcal{S}=]-\infty;0]\cup[1;4]$.

11.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
$4-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$-2x+1$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$P(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2(4-x)(-2x+1) > 0$ est $\mathcal{S} =]-\infty; 0[\cup \left]0; \frac{1}{2}\right[\cup]4; +\infty[$.

12.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x^3		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^3(x+1) < 0$ est $\mathcal{S} =]-1; 0[$.

13.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
x^2+1		$+$		$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(x^2+1)(x-1) \geqslant 0$ est $\mathcal{S} = [1; +\infty[$.

14.

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$4-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(x-2)(4-x)<0$ est $\mathcal{S}=]-\infty;2[\cup]4;+\infty[$.

15.

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$\frac{7}{6}$		$+\infty$
$\frac{3}{4}-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-\frac{7}{6}$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\left(\frac{3}{4}-x\right)\left(x-\frac{7}{6}\right)\geqslant 0$ est $\mathcal{S}=\left[\frac{3}{4};\frac{7}{6}\right]$.

16.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		4		$+\infty$
$x+\sqrt{3}$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(x+\sqrt{3})(x-4)\geqslant 0$ est $\mathcal{S}=[\sqrt{3};4]$.

17.

x	$-\infty$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$3x-7$		$-$	0	$+$	
$7-3x$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		$-$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(3x-7)(7-3x) \leqslant 0$ est $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

3 Inéquation se ramenant à une inéquation produit-nul.

Exercice 10. ☯

Justifiez que les inéquations suivantes sont équivalentes

$$(2x-4)(x+5)+x > -5 \text{ et } (2x-3)(x+5) > 0$$

puis résolvez l'inéquation $(2x-4)(x+5)+x > -5$.

Correction de l'exercice 10

*

$$\begin{aligned}(2x-4)(x+5)+x > -5 &\iff (2x-4)(x+5)+x+5 > 0\\ &\iff (2x-4)(x+5)+1\times(x+5) > 0\\ &\iff [(2x-4)+1](x+5) > 0\\ &\iff (2x-4+1)(x+5) > 0\\ &\iff (2x-3)(x+5) > 0\end{aligned}$$

* Résolvons l'inéquation $(2x-3)(x+5) > 0$.

. $f : x \mapsto 2x-3$ est une fonction affine avec $a = 2$ et $b = -3$. $a > 0$ donc f est strictement croissante. f s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$.

. $g : x \mapsto x+5$ est une fonction affine avec $a = 1$ et $b = 5$. $a > 0$ donc g est strictement croissante. g s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{5}{1} = -5$.

Nous en déduisons

x	$-\infty$		-5		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x-3)(x+5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de $(2x-4)(x+5)+x>-5$ est $\mathscr{S}=]-\infty;-5[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$.

Exercice 11. ⚽

Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 \leqslant 16$.

Exercice 12. ⚽

Résolvez les inéquation suivantes dans l'ensemble des réels.

1. $x^2-4x \leq -2x-1$
2. $3x(x+3)-(x+3)^2 \leq 0$
3. $x^3+2x^2+x \geq 0$
4. $x(x+6) > 3(x+6)$
5. $2x(x-3)+3x-9 < 6x-18$
6. $x^2(1-3x)+4(6x-2) \geq 0$
7. $(1-2x)x-4x(x+6) \leq 0$
8. $7-x^2 < 2x-2\sqrt{7}$
9. $(x^2-1)+2x-2 > 6x-6$
10. $x^2 \leq 10$
11. $x^2 \leq -16$
12. $x^2 \leq 0$
13. $x^2 < 8$
14. $x^2 \leq 144$
15. $x^2 \leq 20$
16. $x^2-4+(x+2)(2x+5) < 0$
17. $(x+1)(x-3) \geq x^2-9$
18. $4x-4+(x-1)(x-4)+x^2-1 > 0$
19. $(x+5)^2 \leq (x+5)(x+3)$
20. $(2x-1)(x+3) \geq \left(x-\frac{1}{2}\right)(x+6)$

4 Inéquation quotient.

Exercice 13. ☯

Résolvez l'inéquation $\dfrac{-x+1}{-2x+8} > 0$.

Exercice 14. ⚽

Résolvez les inéquations dans $\mathbb{R}$.

1. $\dfrac{2x-4}{x+2} \leqslant 0$
2. $\dfrac{-2x+8}{3x-2} \leqslant 0$
3. $\dfrac{2x+4}{x-1} - 2 \geq 0$
4. $\dfrac{2x+4}{x+1} < 3$
5. $\dfrac{2x+3}{x+1} \leq \dfrac{x-6}{x+1}$
6. $1 < \dfrac{2x+10}{-x+3}$
7. $\dfrac{x+3}{2x-1} \geq 0$
8. $\dfrac{2-x}{5-2x} \leq 0$
9. $\dfrac{3x-1}{-x+5} > 0$
10. $\dfrac{5x(x-2)}{4x+1} < 0$
11. $\dfrac{2x^2}{(-x+1)(x+3)} \geq 0$
12. $\dfrac{-x(x-4)}{2+x^2} \leq 0$
13. $\dfrac{(x+1)(x-2)}{3-x} > 0$
14. $\dfrac{9-4x}{11-5x} < 0$
15. $\dfrac{-5+4x}{2x-1} \geq 0$
16. $\dfrac{x+1}{3-x} \leq 0$
17. $\dfrac{7-2x}{2x-1} > 0$
18. $\dfrac{-5x}{(2x-7)^2} < 0$
19. $\dfrac{1+2x^2}{7-x} \geq 0$
20. $\dfrac{x+4}{5-x} < 2$

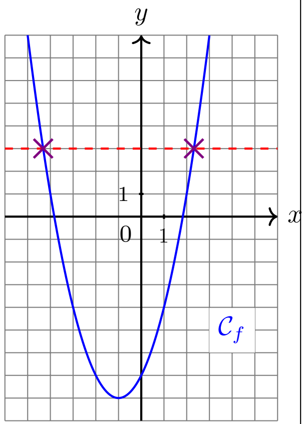
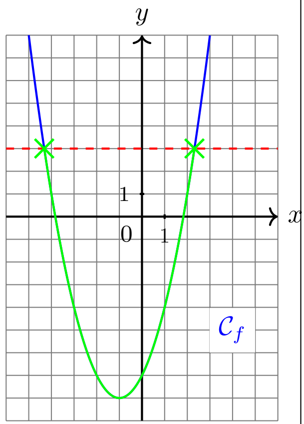
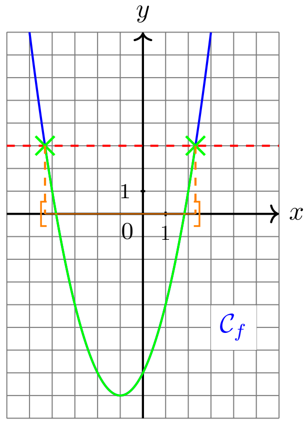
V Conjecturer graphiquement les solutions d'une inéquation.

1 "Résolution graphique" d'inéquation : $f(x) \leq a$ (avec $a \in \mathbb{R}$).

Pour conjecturer les solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 7 \leq 3$ nous introduisons encore la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x - 7 \end{array}$ puis traçons sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ avec un logiciel.

Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq 3$ sont les abscisses des points de la courbe d'ordonnée plus petite ou égale à 3.

Les étapes de la recherche sont les suivantes :

1	2	3
Dessinez l'ordonnée 3.	Identifiez les points de la courbe dont l'ordonnée est plus petite que 3.	Lire les abscisses correspondantes.
		

Enfin donnez les solutions sous forme d'ensemble : l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 7 \leq 3$ est $[-4{,}3\ ;\ 2{,}3]$.

Remarquons enfin que si l'inégalité avait été stricte ($x^2 + 2x - 7 < 3$) l'ensemble des solutions eut été ouvert ($]-4{,}3\ ;\ 2{,}3[$).

Exercice 15. ☯

Exercice 32 page 104 du manuel Sesamath : résolution d'inéquations, réunion, ouverts, fermés.

Exercice 16. ⚽

Exercice 31 page 104 du manuel Sesamath : résolution d'inéquations.

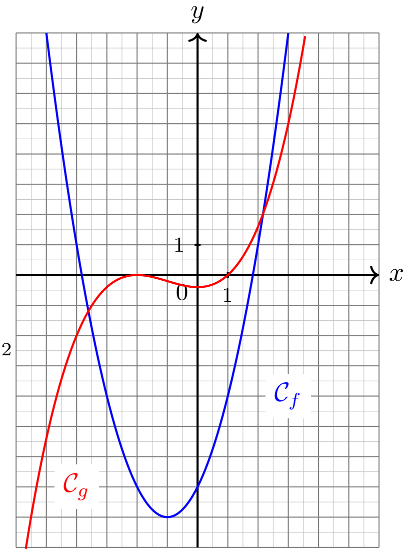
2 "Résolution graphique" d'inéquation : $f(x) \leq g(x)$.

Pour conjecturer les solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 7 \leq 0{,}1(x+2)^3 - 0.3(x+2)^2$ nous introduisons encore les fonctions

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x - 7 \end{array}$$ et

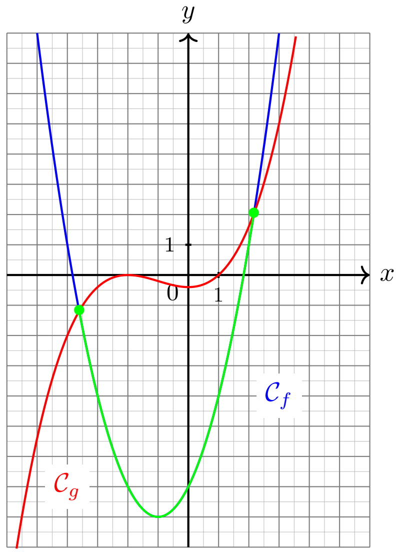
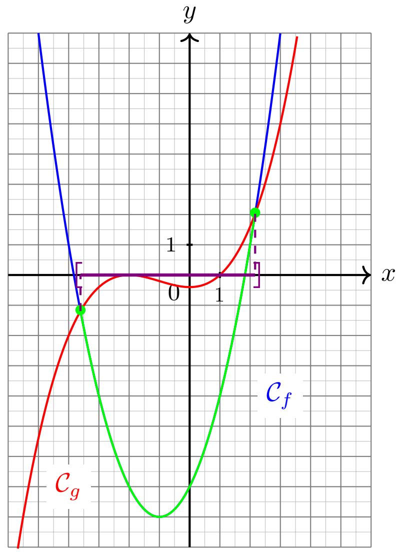
$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0{,}1(x+2)^3 - 0.3(x+2)^2 \end{array}$$

puis traçons leurs courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ avec un logiciel.



Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ situés en dessous de ceux de la courbe $\mathcal{C}_g$.

Les étapes de la recherche sont les suivantes :

1	2
Identifiez les points de $\mathcal{C}_f$ situés en dessous de ceux de $\mathcal{C}_g$. 	Lire les abscisses correspondantes. 

Enfin donnez les solutions sous forme d'ensemble : l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 7 \leq 0{,}1(x+2)^3 - 0.3(x+2)^2$ est $[-3{,}6\ ;\ 2{,}2]$.

Exercice 17. ⚽
Exercice 33 page 105 du manuel Sesamath : résolution d'inéquations.

Exercice 18. ⚽
Exercice 35 page 105 du manuel Sesamath : résolution d'inéquations.

VI Exercices.

Exercice 19. ⚽
Deux entreprises de transport proposent les tarifs suivants :

- 110 € au départ plus 1,26 € du kilomètre ;
- 120 € au départ plus 1,22 € du kilomètre.

Pour quels kilométrages le tarif du second transporteur est-il plus avantageux ?

Exercice 20.

Un libraire vend des crayons 2,4 € pièce. Sur ces articles ses frais s'élèvent à 0,6 € par crayon auxquels il faut ajouter une somme fixe de 34,2 €.
Calculez, en fonction de x, le bénéfice réalisé par la vente de x crayons. Combien doit-il vendre de crayons pour que le bénéfice soit compris entre 68,4 € et 102,6 € ?

Exercice 21.

Résolvez les inéquations suivantes.

1. $2x > 7x - 1$
2. $-4x - 10 \geq 2 - 4x$
3. $2x^2 < 2(x-7)^2$
4. $x^2 < 25$
5. $(x+3)^2 < -1$
6. $(x-6)^2 > 16$
7. $(2x - \sqrt{3})(2x+6) > 0$
8. $\frac{36-12x}{x-3} \leq 0$
9. $x^2 - 5 < (x+\sqrt{5})(x-2)$
10. $x^2 - 25 + (x-5)(6-x) \leq 0$

Exercice 22.

1. Résolvez l'inéquation $\dfrac{2x+3}{x-1} \geq 4$.
2. Comment vérifier graphiquement ce résultat ?

Exercice 23.

Une entreprise fabrique et vend de la pâte à papier. Le coût de production de q tonnes de pâte à papier est donné, en milliers d'euros par

$$C(q) = 0{,}02q^2 + 0{,}1q + 9$$

pour $q \in [0; 80]$.
La recette, en milliers d'euros, engendrée par la vente de q tonnes de pâte à papier est donnée par

$$R(q) = 1{,}2q$$

1. (a) Quel est le coût le fabrication d'une tonne de pâte à papier ?
   (b) Quel est prix de vente d'une tonne de pâte à papier ?
   (c) L'entreprise est-elle bénéficiaire lorsqu'elle vend et produit une tonne de pâte à papier ?
2. Avec la calculatrice conjecturez pour quelles quantités de pâte à papier l'entreprise est bénéficiaire.
3. Démontrez que le bénéfice, en milliers d'euros, réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend q tonnes de pâte à papier est

$$B(q) = -0{,}02q^2 + 1{,}1q - 9$$

4. Démontrez que $B(q) = -0{,}02(q - 45)(q - 10)$ quelque soit $q \in [0; 80]$.
5. Déterminez pour quelles quantités de pâte à papier l'entreprise est bénéficiaire.

Exercice 24.

Une entreprise fabrique un produit. Pour une période donnée, le coût total de production, en euros, est donné en fonction du nombre q d'articles fabriqués par : $C(q) = 2q^2 + 10q + 900$ pour $0 < q < 80$.
Tous les articles fabriqués sont vendus. la recette totale en euros est donnée par $R(q) = 120q$.

1. Vérifiez que le bénéfice total est donné par $B(q) = -2(q^2 - 55q + 450)$.
   Puis que la forme factorisée de $B(q)$ est : $B(q) = -2(q - 10)(q - 45)$.
2. Pour quels nombres d'articles produit la production est-elle rentable ?

Exercice 25.

Une entreprise fabrique et vend un produit. On note $f(x)$ le coût de production, exprimé en milliers d'euros, de x tonnes de ce produit.
Pour $0 \leq x \leq 11$, des études ont montré que : $f(x) = x^3 - 12x^2 + 50x$.
L'entreprise vend son produit 30 000 € la tonne. On note $g(x)$ la recette exprimée en milliers d'euros et $B(x)$ le bénéfice : $B(x) = g(x) - f(x)$.

1. Exprimez $g(x)$ en fonction de x.
2. Développez, réduisez et ordonnez $B(x)$.
3. Développez, réduisez et ordonnez $(x-2)(x-10)$.
4. Résolvez l'inéquation $B(x) > 0$.
5. Interprétez le résultat de la question précédente.

Exercice 26.

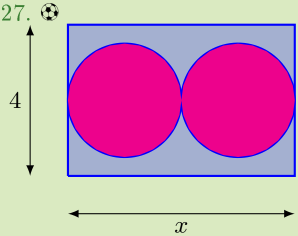
Soient f et g des fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 \text{ et } g(x) = 2x + 1$$

1. Vérifiez que pour tout réel x, $f(x) - g(x) = (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$.
2. Résolvez l'inéquation $f(x) < g(x)$.

Exercice 27.

Soit un réel x dans $[0; 8]$. On considère un rectangle de dimension 4 cm sur x cm, dans lequel on trace deux disques de même rayon comme sur la figure ci-contre.



On souhaite déterminer les valeurs de x de façon que l'aire bleue (ce qu'il reste du rectangle) soit supérieure à l'aire rose (les deux disques).

1. Montrez que le problème se ramène à la résolution de l'inéquation $\dfrac{\pi x^2}{8} \leq 2x$ sur $[0; 8]$.
2. Montrez que l'ensemble des solutions est $\left[0; \dfrac{16}{\pi}\right[$.

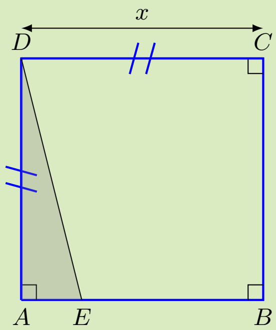
Exercice 28.

Exercice 29.

Exercice 30.

$ABCD$ est un carré de côté x, exprimé en cm, avec $x > 6$. E est le point du segment $[AB]$ tel que

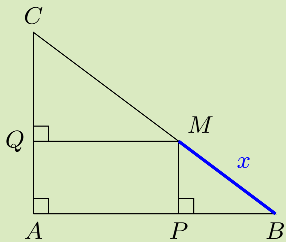
$$EB = 6 \text{ cm}$$



1. Exprimez en fonction de x, l'aire en cm^2 du triangle AED.
2. Peut-on trouver x pour que l'aire du carré $ABCD$ soit strictement supérieure au triple de l'aire du triangle AED ?

Exercice 31.

ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AB = 8$ et $AC = 6$. M est un point de l'hypoténuse $[BC]$.
Par M, on trace les perpendiculaires à (AB) et (AC). Elles coupent $[AB]$ et $[AC]$ respectivement en P et Q.
On pose $BM = x$.
On se propose d'étudier quelques propriétés du périmètre du rectangle $APMQ$.

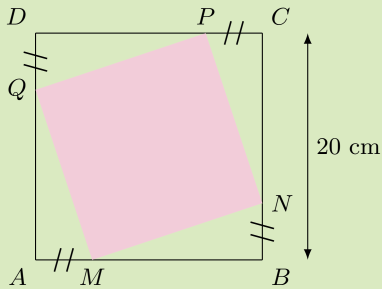


1. Démontrez que $MP = 0{,}6x$ et $MQ = 8 - 0{,}8x$.
2. Exprimez, en fonction de x, le périmètre $p(x)$ du rectangle $APMQ$.
3. Pour quelles positions de M le périmètre est-il supérieur ou égale à 13,5 ?
4. Comparez le périmètre de $AMPQ$ au demi-périmètre du triangle ABC.

Exercice 32.

Dans un carré $ABCD$ de côté 20 cm, on inscrit un carré $MNPQ$ suivant le schéma ci-contre.

On pose $x = AM = BN = CP = DQ$ avec $0 \leq x \leq 20$.



Le but de cet exercice est de déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire du carré $MNPQ$ dépasse 272 cm^2.

1. Exprimez l'aire en cm^2, $g(x)$ du carré $MNPQ$ en fonction de x, sous forme développée, ordonnée et réduite.
2. Prouvez que $g(x) > 272$ équivaut à
$$2x^2 - 40x + 128 > 0.$$
3. On note $f(x) = 2x^2 - 40x + 128$. Affichez sur votre calculatrice la courbe représentative de f, tracez à main levée la courbe observée puis conjecturez les solutions du problème.
Pour la fenêtre on utilisera les paramètres d'affichages suivants.
Axe des abscisses : $0 \leq x \leq 20$.
Axe des ordonnées : $-100 \leq y \leq 200$.
4. On se propose de retrouver le résultat par le calcul.
   (a) Vérifiez que $f(x) = (8 - 2x)(16 - 2x)$.
   (b) Étudiez le signe de $f(x)$.
   (c) Déduisez-en les solutions du problème.