Équations du premier degré.

Généralités sur les équations.

Une *équation* est une égalité dans laquelle se trouvent des lettres (des *inconnues* ou *variables*) qui représentent des nombres (expression littérale).

Une équation est soit vraie, soit fausse, suivant les valeurs choisies pour remplacer les lettres.

Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs qui rendent l'équation vraie.

Exemples.

1. $3x^2 + 2$ n'est pas une équation, c'est une expression littérale.
2. $x = 2$ est une équation (qui est dite résolue en x).
3. $y = 2x$ est une équation avec deux inconnues.
4. $3x - 12 = 0$ est une équation de degré 1 (car l'inconnue est à la puissance 1).
5. $x^2 = 16$ est une équation de degré 2.

Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs qui rendent l'équation vraie. Une valeur qui rend une équation vraie est appelée une *solution* de l'équation.

Il n'y a pas une unique méthode de résolution des équations. Il y a presque autant de méthodes que d'équations.

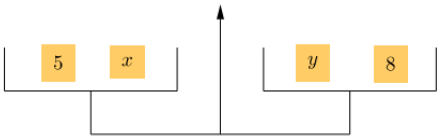
Nous apprendrons certaines de ces méthodes.

Pour simplifier la résolution et pour identifier à quel type d'équation nous avons à faire nous modifierons souvent l'équation de façon à obtenir une égalité à 0.

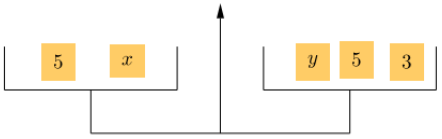
Exemple.

EXERCICE 1.

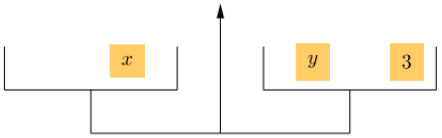
Trouvez le poids de x en fonction de celui de y grâce aux trois étapes suivantes.



$x + 5 = y + 8$



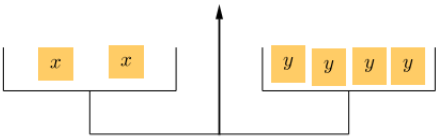
$x + 5 - 5 = y + 8 - 5$



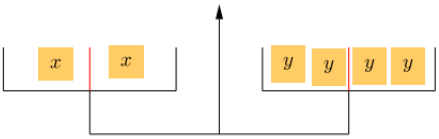
$x = y + 3$

EXERCICE 2.

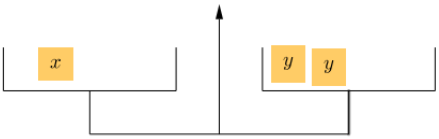
Même objectif :



$2x = 4y$



$\frac{2x}{2} = \frac{4y}{2}$



$x = 2y$

Modifications autorisées sur les équations.

Théorème 1. On ne modifie pas les solutions d'une équation en additionnant (respectivement en soustrayant, respectivement en multipliant, respectivement en divisant) par un même nombre non nul des deux côtés de l'égalité.

Démonstration.

Par exemple pour l'addition. En logique, pour toutes quantités a et b, et pour toute expression $F(x)$, si $a = b$ alors $F(a) = F(b)$.

En particulier lorsque $F(x) = x + c$, nous obtenons $F(a) = F(b)$ et donc $a + c = b + c$.

La réciproque n'est pas évidente.

Remarques.

1. Attention lorsque vous divisez de vérifier que vous ne divisez pas par zéro.
2. On ne peut multiplier par zéro sans modifier les résultats de l'équation. Le pouvoir absorbant du zéro fait disparaître l'information contenue dans l'équation.
3. Ce résultat constitue une boîte à outils. Il indique des transformations autorisées sur une équation pour en trouver les solutions.
4. Il faut beaucoup s'entraîner pour savoir quelles transformations utiliser pour résoudre telle ou telle équation.
5. Il est bien sûr toujours possible d'ajouter ou soustraire 0 mais c'est sans intérêt.
6. Deux équations qui ont le même ensemble de solutions sont dite *équivalents*.

Exemples.

1. $x^3 + x^2 - 7 = 2x^3 + x^2 - 7$ et $x^3 = 2x^3$ ont le même ensemble de solutions.

Équations du premier degré.

Définition 1.

Une *équation du premier degré* (ou équation linéaire, ou équation polynomiale de degré 1) est une équation qui peut s'écrire sous la forme

$$ax + b = 0$$

avec a et b des nombres fixés et x un nombre variable.

Remarques.

1. Les équations linéaires de degré 1 comportent des x mais pas de x^2 ou de x^3, ni de $\sqrt{x}$ ou de division par x.
2. Pour identifier l'équation du premier degré on regroupe tous les termes d'un même côté de l'égalité. Autrement dit il faut se ramener à une égalité à 0.
3. La résolution des équations du premier degré consiste à « isoler le x ».
   Supposons que a n'est pas nul.

$$ax + b = 0$$

équivaut successivement à

$$\begin{aligned} ax + b - b &= 0 - b \\ ax &= -b \\ \frac{ax}{a} &= \frac{-b}{a}, \text{ car } a \neq 0 \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $ax + b = 0$ est $\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

Exemples.

1. $7 - 3x = -7x + 8$

EXERCICE 3. Résolvez les équations du premier degré suivantes d'inconnue x :

a) $x + 4 = 7$
b) $3x = 12$
c) $-3x + 4 = 13$
d) $-3x + 4 = 14x - 7$

Exercice 3.

a) Résolvons l'équation.

$$x + 4 = 7$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} x + 4 - 4 &= 7 - 4 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{3\}$.

b) Résolvons l'équation.

$$3x = 12$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \frac{3x}{3} &= \frac{12}{3} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{4\}$.

c) Résolvons l'équation.

$$-3x + 4 = 13$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} -3x + 4 - 4 &= 13 - 4 \\ -3x &= 9 \\ \frac{-3x}{-3} &= \frac{9}{-3} \\ x &= -3 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{-3\}$.

d) Résolvons l'équation.

$$-3x + 4 = 14x - 7$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} -3x + 4 - 14x &= 14x + 7 - 14x \\ -17x + 4 &= 7 \\ -17x + 4 - 4 &= 7 - 4 \\ -17x &= 3 \\ \frac{-17x}{-17} &= \frac{3}{-17} \\ x &= -\frac{3}{17} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \left\{-\frac{3}{17}\right\}$.

EXERCICE 4. Résolvez l'équation d'inconnue x : $\frac{2x}{3} = \frac{5x}{7}$.

Exercice 4.

L'équation admet une unique solution qui est 0.

EXERCICE 5.

a) $2x - 3 = 5$,
b) $x + 4 = 5x - 2$,
c) $3(x + 1) = 5x - 1$,
d) $-2(4 - x) + 1 = 2$,
e) $\frac{2}{3}x = 4$,
f) $-3x = 4$,
g) $-6x = \frac{2}{3}$,
h) $-\frac{t}{3} = 2$,
i) $2(3x - 1) - 5 = x + 1$,
j) $-3x + 4 = 2\left(x + \frac{2}{5}\right)$,
k) $3(x - 2) - 1 = -2(x + 4)$,
l) $2(4 - 3x) = -(x + 5)$,
m) $2\left(\frac{x}{3} - 1\right) = x - \frac{1}{3}$,
n) $\frac{x - 5}{7} = -3$,
o) $\frac{1}{4}x + \frac{1}{8} = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$,
p) $\frac{x - 3}{2} = 2x + 1$.

Exercice 5.

a) $2x - 3 = 5$, $\mathscr{S} = \{4\}$.

b) $x+4=5x-2$, $\mathscr{S}=\left\{\frac{3}{2}\right\}$.
c) $3(x+1)=5x-1$, $\mathscr{S}=\{1\}$.
d) $-2(4-x)+1=2$, $\mathscr{S}=\left\{\frac{5}{2}\right\}$.
e) $\frac{2}{3}x=4$, $\mathscr{S}=\{6\}$.
f) $-3x=4$, $\mathscr{S}=\left\{-\frac{4}{3}\right\}$.
g) $-6x=\frac{2}{3}$, $\mathscr{S}=\left\{\frac{-1}{9}\right\}$.
h) $-\frac{t}{3}=2$, $\mathscr{S}=\{-6\}$.
i) $2(3x-1)-5=x+1$, $\mathscr{S}=\left\{\frac{8}{5}\right\}$.
j) $-3x+4=2\left(x+\frac{2}{5}\right)$, $\mathscr{S}=\left\{\frac{16}{25}\right\}$.
k) $3(x-2)-1=-2(x+4)$, $\mathscr{S}=\left\{-\frac{1}{5}\right\}$.
l) $2(4-3x)=-(x+5)$, $\mathscr{S}=\left\{\frac{11}{5}\right\}$.
m) $2\left(\frac{x}{3}-1\right)=x-\frac{1}{3}$, $\mathscr{S}=\{-5\}$.
n) $\frac{x-5}{7}=-3$, $\mathscr{S}=\{-16\}$.
o) $\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$, $\mathscr{S}=\left\{\frac{1}{4}\right\}$.
p) $\frac{x-3}{2}=2x+1$, $\mathscr{S}=\left\{-\frac{5}{3}\right\}$.

EXERCICE 6. Identifiez puis résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations linéaires parmi les équations d'inconnue x suivantes :

a) $x^2=3x-1$
b) $-4x+2=10$
c) $\sqrt{x}+1=3$
d) $9x-1=2x-15$
e) $\dfrac{1}{x}+3=1$
f) $\dfrac{1}{3}=\dfrac{3x}{6}-7$
g) $5x-7-x=4x$
h) $\sqrt{7}x-2=-\pi$

Exercice 6.

Toutes les expressions qui ne ressemble pas à des formules algébriques de fonctions affines ne correspondent pas à des équations linéaires. Concrètement, les expressions $\sqrt{x}$, x^2, x^3, ..., $\frac{1}{x}$ ne doivent pas apparaître.

a) Ce n'est pas une équation linéaire.
b) C'est une équation linéaire et $\mathscr{S}=\{-2\}$.
c) Ce n'est pas une équation linéaire.
d) C'est une équation linéaire et $\mathscr{S}=\{-2\}$.
e) Ce n'est pas une équation linéaire.
f) Il s'agit bien d'une équation linéaire.

$$\frac{1}{3}=\frac{3x}{6}-7$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}&=\frac{3}{6}x-7\\
\frac{1}{3}+7&=\frac{3}{6}x-7+7\\
\frac{22}{3}&=\frac{3}{6}x\\
\frac{6}{3}\times\frac{22}{3}&=\frac{6}{3}\times\frac{3}{6}x\\
\frac{22}{6}&=x\\
\frac{2\times 11}{2\times 3}&=x
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S}=\left\{\frac{11}{3}\right\}$.

g) Il s'agit bien d'une équation linéaire.
Cependant la situation est un peu particulière comme le montre la résolution de cette équation.

$$5x - 7 - x = 4x$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 4x - 7 &= 4x \\ 4x - 7 - 4x &= 4x - 4x \\ -7 &= 0 \end{aligned}$$

Toute la difficulté est d'interpréter cette dernière égalité.
Lorsque nous travaillons par équivalence toutes les phrases mathématiques écrites sont aussi vraies les unes que les autres. Or la dernière phrase que nous avons obtenue est, très clairement, fausse, donc la première est tout aussi fausse. Ainsi l'égalité proposée est toujours fausse, et ce, qu'elle que soit la valeur choisie pour x. Autrement dit il n'y a aucune solution.

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \varnothing$.

h) La présence de $\sqrt{7}$ ou de π ne doit pas effrayer : il s'agit juste de nombres.
C'est une équation du premier degré et :

$$\sqrt{7}x - 2 = -\pi$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \sqrt{7}x - 2 + 2 &= -\pi + 2 \\ \sqrt{7}x &= -\pi + 2 \\ \frac{\sqrt{7}x}{\sqrt{7}} &= \frac{-\pi + 2}{\sqrt{7}} \\ x &= \frac{-\pi + 2}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$

Et il n'y a pas d'écriture plus simple de ce nombre.

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \left\{\frac{-\pi+2}{\sqrt{7}}\right\}$.

Exercices.

EXERCICE 7. Résolvez l'équation en x.
Exemple :

$$\begin{aligned} x + 3 = 0 &\iff x + 3 - 3 = 0 - 3 \\ &\iff x = -3 \end{aligned}$$

a) $x + 2 = 0$.
b) $x + 7 = 0$.
c) $2 \times x = 0$.
d) $4x = 0$.
e) $x \div 3 = 0$.
f) $\frac{x}{2,3} = 0$.
g) $x - 3 = 0$.
h) $x - 12 = 0$.
i) $x - 1{,}3 = 0$.
j) $3{,}7x = 0$.
k) $x + 3{,}7 = 0$.
l) $x + \frac{1}{2} = 0$.
m) $x - \frac{13}{12} = 0$.
n) $\frac{4}{3}x = 0$.
o) $\frac{x}{\frac{1}{7}} = 0$.
p) $\frac{\frac{x}{3}}{\frac{4}{7}} = 0$.
q) $3 - x = 0$.
r) $-6 - x = 0$.
s) $-x + 1 = 0$.
t) $-x + \frac{1}{3} = 0$.

Exercice 7.

a) $x = -2$.
b) $x = -7$.
c) $x = 0$.
d) $x = 0$.

e) $x = 0$. f) $x = 0$. g) $x = 3$. h) $x = 12$.
i) $x = 1{,}3$. j) $x = 0$. k) $x = -3{,}7$. l) $x = -\frac{1}{2}$.
m) $x = \frac{13}{12}$. n) $x = 0$. o) $x = 0$. p) $x = 0$.
q) $x = 3$. r) $x = -6$. s) $x = 1$. t) $x = \frac{1}{3}$.

EXERCICE 8. Résolvez l'équation en x.

a) $x + 12 = 0$. b) $x + \pi = 0$. c) $\sqrt{2} \times x = 0$. d) $2{,}7x = 0$.
e) $x \div \sqrt{7} = 0$. f) $\dfrac{x}{10^3} = 0$. g) $x - 5 = 0$. h) $x - 14 = 0$.
i) $x - 2{,}71 = 0$. j) $8{,}2x = 0$. k) $x + 1{,}05 = 0$. l) $x + \dfrac{3}{11} = 0$.
m) $x - \dfrac{2}{6} = 0$. n) $\dfrac{10^3}{12\,345}x = 0$. o) $\dfrac{x}{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}} = 0$. p) $\frac{\frac{x}{2}}{\frac{2}{3}} = 0$.
q) $17 - x = 0$. r) $-24 - x = 0$. s) $-x + 23 = 0$. t) $-x + \dfrac{\pi}{2} = 0$.

Exercice 8.

a) $x = -12$. b) $x = -\pi$. c) $x = 0$. d) $x = 0$.
e) $x = 0$. f) $x = 0$. g) $x = 5$. h) $x = 14$.
i) $x = 2{,}71$. j) $x = 0$. k) $x = -1{,}05$. l) $x = -\frac{3}{11}$.
m) $x = \frac{1}{3}$. n) $x = 0$. o) $x = 0$. p) $x = 0$.
q) $x = 17$. r) $x = -24$. s) $x = 23$. t) $x = \frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 9. Résolvez l'équation en x. α, μ et y désignent des nombres non nuls.
Exemple :

$$\begin{aligned} 2x + 1 = 0 &\iff 2x + 1 - 1 = 0 - 1 \\ &\iff 2x = -1 \\ &\iff \frac{2x}{2} = \frac{-1}{2} \\ &\iff x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

a) $3x + 6 = 0$. b) $4x - 8 = 0$. c) $-2x + 4 = 0$.
d) $-7x - 63 = 0$. e) $8x - 2 = 0$. f) $6x - 7 = 0$.
g) $-5x + 9 = 0$. h) $-13x - 1 = 0$. i) $1{,}5x + 3 = 0$.
j) $2{,}7x - 1{,}2 = 0$. k) $-3{,}14x + 12 = 0$. l) $-1{,}32x - 7{,}1 = 0$.
m) $\dfrac{1}{2}x + 3 = 0$. n) $\dfrac{2}{7}x - \dfrac{5}{4} = 0$. o) $-\dfrac{3}{11}x + \dfrac{2}{5} = 0$.
p) $-\dfrac{13}{4}x - \dfrac{1}{7} = 0$. q) $\alpha x + 1 = 0$. r) $\mu x - y = 0$.

Exercice 9.

a) $x = -2$. b) $x = 2$. c) $x = 2$.
d) $x = -9$. e) $x = 4$. f) $x = \frac{7}{6}$.
g) $x = \frac{9}{5}$. h) $x = -\frac{1}{13}$. i) $x = -2$.
j) $x = \frac{12}{27}$. k) $x = \frac{1200}{314}$. l) $x = \frac{355}{66}$.
m) $x = -6$. n) $x = \frac{35}{8}$. o) $x = \frac{22}{15}$.
p) $x = -\frac{4}{91}$. q) $x = -\frac{1}{\alpha}$. r) $x = \frac{y}{\mu}$.

EXERCICE 10. Résolvez l'équation en x. α, μ et y désignent des nombres non nuls.

a) $4x + 16 = 0$. b) $8x - 64 = 0$. c) $-6x + 18 = 0$.
d) $-11x - 121 = 0$. e) $8x - 2 = 0$. f) $8x - 9 = 0$.
g) $-5x + 12 = 0$. h) $-17x - 6 = 0$. i) $0{,}14x + 35 = 0$.
j) $12{,}1x - 1{,}21 = 0$. k) $-6{,}53x + 89 = 0$. l) $-3{,}65x - 67{,}4 = 0$.
m) $\frac{7}{9}x + 2 = 0$. n) $\frac{4}{3}x - \frac{5}{8} = 0$. o) $-\frac{4}{6}x + \frac{2}{4} = 0$.
p) $-\frac{2}{23}x - \frac{1}{9} = 0$. q) $3\alpha x + 7 = 0$. r) $\frac{1}{2}\mu x - y = 0$.

Exercice 10.

a) $x = -4$.
b) $x = 8$.
c) $x = 3$.
d) $x = -11$.
e) $x = \frac{1}{4}$.
f) $x = \frac{9}{8}$.
g) $x = \frac{12}{5}$.
h) $x = -\frac{6}{17}$.
i) $x = -\frac{3500}{14}$.
j) $x = 0{,}1$.
k) $x = \frac{89}{6{,}53}$.
l) $x = -\frac{67{,}4}{3{,}65}$.
m) $x = -\frac{18}{7}$.
n) $x = \frac{15}{32}$.
o) $x = \frac{3}{2}$.
p) $x = -\frac{23}{18}$.
q) $x = -\frac{7}{3\alpha}$.
r) $x = \frac{2y}{\mu}$.

EXERCICE 11. Résolvez l'équation en x. α, μ et y désignent des nombres non nuls.

Exemple :

$$2x + 1 = 3x \iff 2x + 1 - 2x = 3x - 2x$$
$$\iff 1 = x$$

a) $3x + 6 = 4x$.
b) $4x - 8 = 6x$.
c) $-2x + 4 = 3x$.
d) $-7x - 63 = -4x$.
e) $8x - 2 = 2x$.
f) $6x - 7 = x$.
g) $-5x + 9 = -3x$.
h) $-13x - 1 = -2x$.
i) $1{,}5x + 3 = 1{,}2x$.
j) $2{,}7x - 1{,}2 = -2{,}1x$.
k) $-3{,}14x + 12 = 7x$.
l) $-1{,}32x - 7{,}1 = 8x$.
m) $\frac{1}{2}x + 3 = \frac{3}{2}x$.
n) $\frac{2}{7}x - \frac{5}{4} = -\frac{3}{7}x$.
o) $-\frac{3}{11}x + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}x$.
p) $-\frac{13}{4}x - \frac{1}{7} = \frac{3}{7}x$.
q) $\alpha x + 1 = -3x$.
r) $\mu x - y = \mu$.

Exercice 11.

a) $x = 6$.
b) $x = -4$.
c) $x = \frac{4}{5}$.
d) $x = -21$.
e) $x = \frac{1}{3}$.
f) $x = \frac{7}{5}$.
g) $x = \frac{9}{2}$.
h) $x = -\frac{1}{11}$.
i) $x = -10$.
j) $x = 2$.
k) $x = -\frac{12}{3{,}86}$.
l) $x = -\frac{7{,}1}{6{,}68}$.
m) $x = 3$.
n) $x = \frac{7}{4}$.
o) $x = -\frac{2}{5} \times \frac{55}{18} = \frac{11}{9}$.
p) $x = -\frac{1}{7} \times \frac{28}{103} = -\frac{4}{721}$.
q) $x = -\frac{1}{3+\alpha}$.
r) $x = 1 + \frac{y}{\mu}$.

EXERCICE 12.

Résolvez l'équation en x. α, μ et y désignent des nombres non nuls.

a) $4x + 16 = 2x$.
b) $8x - 64 = -4x$.
c) $-6x + 18 = -x$.
d) $-11x - 121 = -10x$.
e) $8x - 2 = 4x$.
f) $8x - 9 = -7x$.
g) $12 - 5x = -11x$.
h) $-17x - 6 = -5x$.
i) $35 + 0{,}14x = 3x$.
j) $12{,}1x - 1{,}21 = 1{,}35x$.
k) $-6{,}53x + 89 = -7{,}1x$.
l) $-3{,}65x - 67{,}4 = -3x$.
m) $\frac{7}{9}x + 2 = \frac{5}{9}x$.
n) $-\frac{5}{8} + \frac{4}{3}x = -\frac{1}{3}x$.
o) $-\frac{1}{3}x + \frac{2}{4} = \frac{5}{3}x$.
p) $-\frac{2}{23}x - \frac{1}{9} = \frac{1}{2}x$.
q) $3\alpha x + 7 = 3x$.
r) $\frac{1}{2}\mu x - y = \alpha x$.

Exercice 12.

a) $x = -8$.
b) $x = 16$.
c) $x = \frac{18}{5}$.
d) $x = -121$.
e) $x = \frac{1}{2}$.
f) $x = 9$.
g) $x = -2$.
h) $x = -\frac{1}{2}$.
i) $x = \frac{35}{2{,}86}$.
j) $x = \frac{1{,}21}{11{,}75}$.
k) $x = -\frac{89}{0{,}57}$.
l) $x = -\frac{67{,}4}{0{,}65}$.
m) $x = -9$.
n) $x = \frac{3}{8}$.
o) $x = \frac{1}{4}$.
p) $x = -\frac{46}{243}$.
q) $x = -\frac{7}{3(\alpha-1)}$.
r) $x = \frac{y}{\frac{1}{2}\mu - \alpha}$.

EXERCICE 13.

Résolvez l'équation en x. α, μ, t et y désignent des nombres non nuls.

Exemple :

$$\begin{aligned} 2x+1=4+3x &\Leftrightarrow 2x+1\color{orange}{-2x}=4+3x\color{orange}{-2x}\\ &\Leftrightarrow 1=4+x\\ &\Leftrightarrow 1\color{magenta}{-4}=4+x\color{magenta}{-4}\\ &\Leftrightarrow -3=x \end{aligned}$$

a) $2x+4=x+6$.
b) $3x-4=7-6x$.
c) $-x+1=3x+2$.
d) $-7x-63=5-4x$.
e) $8x-2=-3+2x$.
f) $-7+6x=11-x$.
g) $-5x+9=-3x+7$.
h) $-13x-1=-2x+5$.
i) $1{,}5x+3=4-1{,}2x$.
j) $2{,}7x-1{,}2=-2{,}1x-0{,}2$.
k) $-3{,}14x+12=7x-8$.
l) $-1{,}32x-7{,}1=8x+0{,}9$.
m) $\frac{1}{2}x+3=\frac{3}{2}x+1$.
n) $\frac{2}{7}x-\frac{5}{4}=-\frac{3}{7}x-\frac{3}{2}$.
o) $-\frac{3}{11}x+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}x+\frac{1}{35}$.
p) $-\frac{13}{4}x-\frac{1}{7}=-\frac{15}{7}+\frac{3}{7}x$.
q) $\alpha x+1=-3x+t$.
r) $\mu x-y=3t-\mu x$.

Exercice 13.

a) $x=2$.
b) $x=\frac{11}{9}$.
c) $x=-\frac{1}{4}$.
d) $x=-\frac{68}{3}$.
e) $x=-\frac{1}{6}$.
f) $x=\frac{18}{7}$.
g) $x=1$.
h) $x=-\frac{6}{11}$.
i) $x=-\frac{1}{2,7}$.
j) $x=\frac{1}{4,8}$.
k) $x=\frac{20}{10,14}$.
l) $x=-\frac{8}{6,68}$.
m) $x=2$.
n) $x=-\frac{7}{20}$.
o) $x=\frac{13}{35}\times\frac{55}{18}=\frac{141}{126}$.
p) $x=-\frac{2}{103}$.
q) $x=\frac{t-1}{\alpha+3}$.
r) $x=\frac{3t+y}{2\mu}$.

EXERCICE 14.

Résolvez l'équation en x. α, μ, t et y désignent des nombres non nuls.

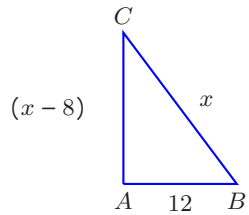
a) $3x+3=x+9$.
b) $2x-8=4-2x$.
c) $-x+7=2x+8$.
d) $-3x-6=3-2x$.
e) $3x-1=-2+x$.
f) $-4+7x=7-x$.
g) $-3x+12=-4x+2$.
h) $-5x-3=-2x+7$.
i) $2{,}5x+5=2-3{,}2x$.
j) $4{,}3x-2{,}5=-2{,}9x-0{,}5$.
k) $-3x+1{,}1=7x-1{,}1$.
l) $-2{,}2x-0{,}1=8x+0{,}1$.
m) $\frac{3}{2}x+2=\frac{1}{2}x+3$.
n) $\frac{5}{2}x-\frac{2}{5}=-\frac{3}{2}x-\frac{5}{3}$.
o) $-\frac{6}{11}x+\frac{1}{2}=\frac{3}{5}x+\frac{1}{3}$.
p) $-\frac{11}{2}x-\frac{2}{3}=-\frac{3}{4}+\frac{3}{2}x$.
q) $3\alpha x+11=-5\alpha x-t$.
r) $-\mu x+y=t+5\mu x$.

Exercice 14.

a) $x=3$.
b) $x=3$.
c) $x=-\frac{1}{3}$.
d) $x=-9$.
e) $x=-\frac{1}{2}$.
f) $x=\frac{11}{8}$.
g) $x=$.
h) $x=$.
i) $x=$.
j) $x=$.
k) $x=$.
l) $x=$.
m) $x=$.
n) $x=$.
o) $x=$.
p) $x=$.
q) $x=$.
r) $x=$.

EXERCICE 15.

Trouver x pour que le triangle ABC soit rectangle en A.



Exercice 15.

ABC est rectangle en A si et seulement si $AB^2+AC^2=BC^2$, d'après le théorème de Pythagore.

Autrement dit il faut et il suffit que : $(x-8)^2 + 12^2 = x^2$.
Cette dernière équation équivaut successivement à :

$$x^2 - 2 \times x \times 8 + 8^2 + 144 = x^2$$
$$x^2 - 16x + 64 + 144 = x^2$$

En se ramenant à une égalité à 0 :

$$x^2 - 16x + 208 - x^2 = x^2 - x^2$$
$$-16x + 208 = 0$$

Nous reconnaissons une équation linéaire :

$$-16x + 208 - 208 = 0 - 208$$
$$-16x = -208$$
$$\frac{-16x}{-16} = \frac{-208}{-16}$$
$$x = 13$$

ABC est rectangle en A si et seulement si $x = 13$.

EXERCICE 16.

Déterminez cinq nombres impairs consécutifs dont la somme est égale à 405.

EXERCICE 17.

Déterminez l'ensemble des valeurs interdites pour le calcul défini pour x réel par

$$\frac{\sqrt{x}}{2x-3}$$

Exercice 17.

Il faut utiliser le fait q'une racine carrée s'applique uniquement à un nombre positif et qu'un quotient ne peut avoir un dénominateur nul.

EXERCICE 18.

Dans une assemblée, quarante personnes ont plus de 40 ans, un quart a entre 30 et 40 ans et un tiers a moins de 30 ans. Quel est le nombre de personnes de cette assemblée ?

Exercice 18.

Le plus souvent l'inconnue qu'il est pertinent d'introduire est la grandeur recherchée.

Notons x le nombre de personnes dans l'assemblée.
L'énoncé se traduit alors par l'égalité :

$$40 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x = x$$

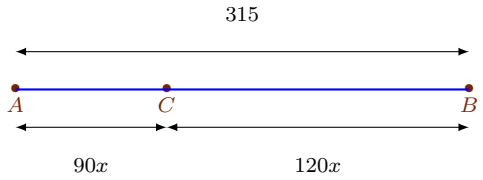
Il s'agit d'une équation linéaire dont l'unique solution est 96.

EXERCICE 19.

Deux trains partent à 4 h du matin, l'un de la ville A vers la ville B, et l'autre de la ville B située à 315 km de A en direction de la ville A. À quelle heure se fera la rencontre, sachant que le premier roule à 90 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ et le second à 120 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$?

Exercice 19.

Notons x le temps, en heures, mis par les deux trains pour se croiser.



La distance parcourue par le train partant de A au moment du croisement est (en fonction de x) $90x$.

La distance parcourue par le train partant de B au moment du croisement est (en fonction de x) $120x$).

Ainsi x doit vérifier l'équation

$$90x + 120x = 315$$

Il s'agit d'une équation linéaire dont l'unique solution est $x = 1{,}5$.

Autrement dit les trains se croisent à 5 h 30.

EXERCICE 20.

Un litre d'une boisson contient 7 % de sirop. Quel volume d'eau pure doit-on rajouter pour qu'un litre de cette nouvelle boisson contienne 5 % de sirop ?

Exercice 20. La quantité de sirop avant et après remplissage est la même donc :

$$\frac{7}{100} \times 1 = \frac{5}{100} \times (x + 1)$$

EXERCICE 21.

$ABCD$ est un carré de côté a (a nombre strictement positif). M est un point du segment $[BC]$. Déterminez le point M de façon que le rapport de l'aire du triangle ABM à celle du trapèze $ADCM$ soit égale à $\frac{1}{3}$.

EXERCICE 22.

ABC est un triangle équilatéral de côté a (a nombre strictement positif). Par le point P symétrique de C par rapport à B on trace une droite (Δ) qui rencontre $[AB]$ en M et $[AC]$ en N. On pose $BM = x$.

Déterminez x tel que $CN = \frac{2a}{3}$.

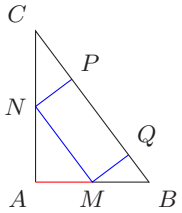
Exercice 22.

Notons R le point de $[BC]$ de sorte que NCR est un triangle équilatéral.

Avec le théorème de Thalès : $\frac{PB}{PR} = \frac{BM}{CN}$ et $CN = \frac{2a}{3}$.

EXERCICE 23.

Un triangle ABC est rectangle en A. Le segment $[AB]$ mesure 3 cm, le segment $[AC]$ mesure 4 cm. Soit M un point de $[AB]$: on pose $AM = x$.



On construit un rectangle $MNPQ$ inscrit dans le triangle comme l'indique la figure ci-dessus.

Déterminez x pour que $MNPQ$ soit un carré.

Exercice 23.

Notons H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$.

1. Les triangles ABC et ABH sont semblables donc $AH = \frac{3}{5} \times AC = \frac{3}{5} \times 4$.

   Configuration des triangles emboîtés : BMQ et BAH. Avec Thalès : $MQ = AH \times \frac{MB}{AB} = \frac{3}{5} \times 4 \times \frac{3-x}{3} x$.

2. Configuration des triangles emboîtés : AMN et ABC. Avec Thalès : $NM = \frac{5}{3}x$.

3. Pour qu'il y ait un carré il faut que $NM = MQ$ et donc : $\frac{15}{12}(3 - x) = \frac{5}{3}x$. D'où $x = \frac{36}{37}$.

EXERCICE 24.

Problème publié dans le Liber Abaci *(1202) par Léonard de Pise dit Fibonacci.*

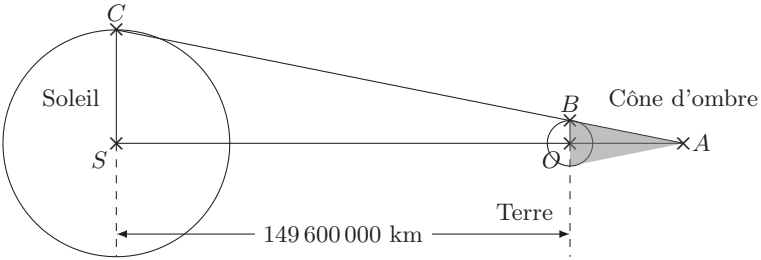
Deux tours élevées l'une de 30 pas, l'autre de 40 sont distantes de 50 pas ; entre les deux se trouve une fontaine vers le centre de laquelle deux oiseaux descendant des sommets des deux tours se dirigent du même vol et parviennent dans le même temps. Quelles sont les distances horizontales du centre de la fontaine aux deux tours ?

L'apport principal de *Léonard de Pise* (dit *Fibonacci*) fut l'introduction de la numération décimale dans le traité de comptabilité *Liber abaci* alors que l'Europe utilise encore les chiffres romains.

Son nom est resté célèbre jusqu'à nos jours grâce à une suite de nombres qui porte son nom et qui est associée au nombre d'or. Chaque terme de la suite de Fibonacci, qui commence par 0 puis 1, est la somme des deux précédents.
Cette suite est souvent évoquée dans des thématiques ésotérique ou esthétique (comme le roman *Da Vinci code*).

Leonardo Fibonacci
(dall'opera *I benefattori dell'umanità*; vol. VI, Firenze, Ducci, 1850)

EXERCICE 25.



1. La distance moyenne Soleil-Terre (calculée de centre à centre) est de 149 600 000 km. Le rayon du soleil est de 696 000 km, celui de la Terre de 6 360 km.
   Démontrez que la hauteur OA du cône d'ombre situé derrière la Terre est de 1 379 642 km par valeur approchée à l'unité près par excès.
2. Calculez le volume du cône d'ombre de sommet A et dont la base est formé par le disque de rayon OB.
3. La distance moyenne Terre-Lune (calculée de centre à centre) est de 382 000 km. Le rayon de la lune est de 1 738 km Étudiez la possibilité d'éclipses totales de la Lune en période de pleine lune.