Les équations du premier degré.

I Généralités sur les équations.

Une *équation* est une égalité dans laquelle se trouvent des lettres (des *variables*) qui représentent des nombres (expression littérale).

Une équation est soit vraie, soit fausse, suivant les valeurs choisies pour remplacer les lettres.

Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs qui rendent l'équation vraie.

Il n'y a pas une unique méthode de résolution des équations. Il y a presque autant de méthodes que d'équations.

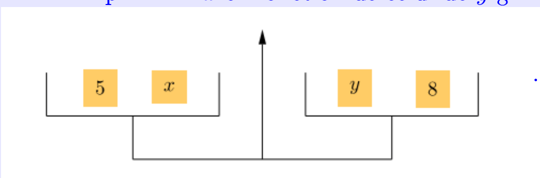
Nous apprendrons certaines de ces méthodes.

Pour simplifier la résolution et pour identifier à quel type d'équation nous avons à faire nous modifierons souvent l'équation de façon à obtenir une égalité à 0.

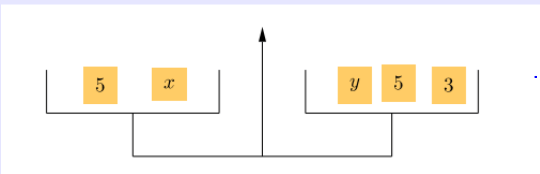
II Exemple.

Exercice 1. Application.

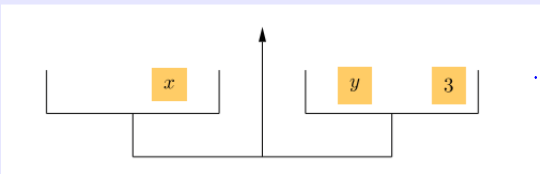
Trouvez le poids de x en fonction de celui de y grâce aux trois étapes suivantes.



....



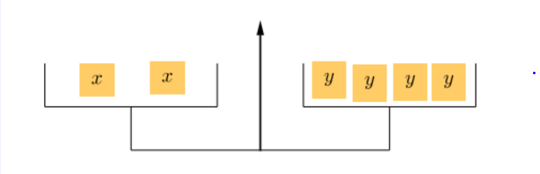
....



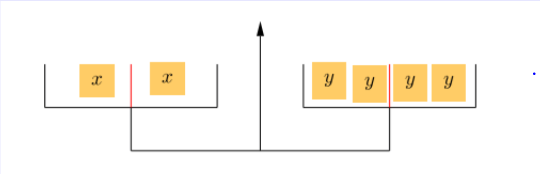
....

Exercice 2. Application.

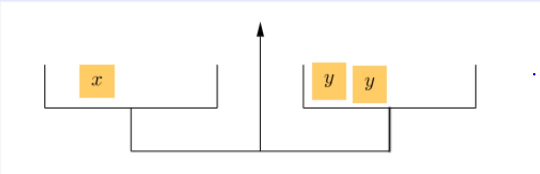
Même objectif :



....



....



....

III Modifications autorisées sur les équations.

Théorème 1

On ne modifie pas les solutions d'une équation en additionnant (respectivement en soustrayant, respectivement en multipliant, respectivement en divisant) par un même nombre non nul des deux côtés de l'égalité.

Remarques.

1. Attention lorsque vous divisez de vérifier que vous ne divisez pas par zéro.
2. On ne peut multiplier par zéro sans modifier les résultats de l'équation. Le pouvoir absorbant du zéro fait disparaître l'information contenue dans l'équation.
3. Ce résultat constitue une boîte à outils. Il indique des transformations autorisées sur une équation pour en trouver les solutions.
4. Il faut beaucoup s'entraîner pour savoir quelles transformations utiliser pour résoudre telle ou telle équation.

IV Équations linéaires.

Définition 1

Une *équation linéaire* (ou équation polynomiale de degré 1) est une équation de la forme
$$ax + b = 0$$
avec a et b des nombres fixés et x un nombre variable.

Remarques.

1. Pour identifier l'équation du premier degré on regroupe tous les termes d'un même côté de l'égalité. Autrement dit il faut se ramener à une égalité à 0.
2. La résolution des équations du premier degré consiste à « isoler le x ».
   Supposons que a n'est pas nul.
   $$ax + b = 0$$
   équivaut successivement à
   $$\begin{aligned} ax + b - b &= 0 - b \\ ax &= -b \\ \frac{ax}{a} &= \frac{-b}{a}, \text{ car } a \neq 0 \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$
   L'ensemble des solutions de l'équation $ax + b = 0$ est $\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

Exercice 3. ♥

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations du premier degré suivantes d'inconnue x :

1. $x + 4 = 7$
2. $3x = 12$
3. $-3x + 4 = 13$
4. $-3x + 4 = 14x - 7$

Exercice 4. Application.

Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :
$$\frac{3x + 2}{7x - 1} = 2.$$

Exercice 5. Application.

1. $2x - 3 = 5$,
2. $x + 4 = 5x - 2$,
3. $3(x + 1) = 5x - 1$,
4. $-2(4 - x) + 1 = 2$,
5. $\frac{2}{3}x = 4$,
6. $-3x = 4$,
7. $-6x = \frac{2}{3}$,
8. $-\frac{t}{3} = 2$,
9. $2(3x - 1) - 5 = x + 1$,
10. $-3x + 4 = 2\left(x + \frac{2}{5}\right)$,
11. $3(x - 2) - 1 = -2(x + 4)$,
12. $2(4 - 3x) = -(x + 5)$,
13. $2\left(\frac{x}{3} - 1\right) = x - \frac{1}{3}$,
14. $\frac{x-5}{7} = -3$,
15. $\frac{1}{4}x + \frac{1}{8} = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$,
16. $\frac{x-3}{2} = 2x + 1$.

Exercice 6. ♥

Identifiez puis résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations linéaires parmi les équations d'inconnue x suivantes :

1. $x^2 = 3x - 1$
2. $-4x + 2 = 10$
3. $\sqrt{x} + 1 = 3$
4. $9x - 1 = 2x - 15$
5. $\frac{1}{x} + 3 = 1$
6. $\frac{1}{3} = \frac{3x}{6} - 7$
7. $5x - 7 - x = 4x$
8. $\sqrt{7}x - 2 = -\pi$

V Équation produit.

Le résultat suivant est fondamental pour résoudre un grand nombre d'équations :

Théorème 2

Soient a et b deux quelconques nombres réels.
Dire que : $ab = 0$ équivaut à dire que $a = 0$ ou $b = 0$.

Remarques.

1. On peut formuler ce résultat de la façon suivante : pour qu'un produit soit nul il faut et il suffit que l'un des facteur (au moins) soit nul.
2. Ce résultat se généralise à un produit de plus de deux facteurs.
3. Dire que : $\frac{a}{b} = 0$ équivaut à dire que $a = 0$. (b est forcément non nul).

Exercice 7. ♥

Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x : $(-3x + 7)(4x - 6) = 0$

Exercice 8. ♥
Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x : $\dfrac{(x-3)(x+4)(x+4)}{(x+2)(x+4)(x-1)} = 0$.

VI Exercices.

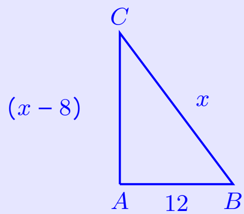
Exercice 9. Application.
Soient $A(6;5)$ et $S(2;3)$ deux points d'un repère (O,I,J).
Déterminez les coordonnées du point A' symétrique de A par rapport à S.

Exercice 10. ♥
Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{3}x - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculez l'image de $\sqrt{3}$ par la fonction f.
2. Déterminez les antécédents de -7 par la fonction f.

Exercice 11. Application.

Trouver x pour que le triangle ABC soit rectangle en A.



Exercice 12. ♥
Déterminez l'ensemble des valeurs interdites pour le calcul définie pour x réel par

$$\frac{\sqrt{x}}{2x-3}$$

Exercice 13. Application.
Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\frac{2x-4}{x} = 3$$

Exercice 14. Application.
Dans une assemblée, quarante personnes ont plus de 40 ans, un quart a entre 30 et 40 ans et un tiers a moins de 30 ans. Quel est le nombre de personnes de cette assemblée ?

Exercice 15. Application.

Considérons un parallélogramme $ABCD$ dans un plan muni d'un repère. Sachant que $A(-1;7)$, $B(-20;100)$, $C(3;107)$ et $D(22;y_D)$, déterminez l'ordonnée y_D du point D.

Exercice 16. Application.

Deux trains partent à 4 h du matin, l'un de la ville A vers la ville B, et l'autre de la ville B située à 315 km de A en direction de la ville A. À quelle heure se fera la rencontre, sachant que le premier roule à 90 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ et le second à 120 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$?

Exercice 17. Application.

Un litre d'une boisson contient 7 % de sirop. Quel volume d'eau pure doit-on rajouter pour qu'un litre de cette nouvelle boisson contienne 5 % de sirop ?

Exercice 18. Application.

Quel est le rayon d'un disque dont l'aire égale le périmètre ?

Exercice 19. Application.

Problème publié dans le Liber Abaci *(1202) par Léonard de Pise dit Fibonacci.*

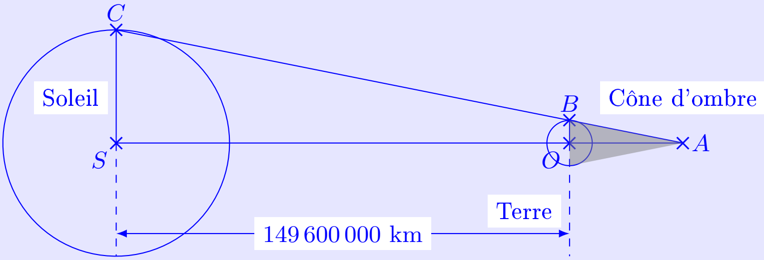
Deux tours élevées l'une de 30 pas, l'autre de 40 sont distantes de 50 pas ; entre les deux se trouve une fontaine vers le centre de laquelle deux oiseaux descendant des sommets des deux tours se dirigent du même vol et parviennent dans le même temps. Quelles sont les distances horizontales du centre de la fontaine aux deux tours ?

L'apport principal de *Léonard de Pise* (dit *Fibonacci*) fut l'introduction de la numération décimale dans le traité de comptabilité *Liber abaci* alors que l'Europe utilise encore les chiffres romains.

Son nom est resté célèbre jusqu'à nos jours grâce à une suite de nombres qui porte son nom et qui est associée au nombre d'or. Chaque terme de la suite de Fibonacci, qui commence par 0 puis 1, est la somme des deux précédents.
Cette suite est souvent évoquée dans des thématiques ésotérique ou esthétique (comme le roman *Da Vinci code*).

Leonardo Fibonacci
(dall'opera *I benefattori dell'umanità*; vol. VI, Firenze, Ducci, 1850)

Exercice 20. Application.



1. La distance moyenne Soleil-Terre (calculée de centre à centre) est de 149 600 000 km.

   Le rayon du soleil est de 696 000 km, celui de la Terre de 6 360 km.

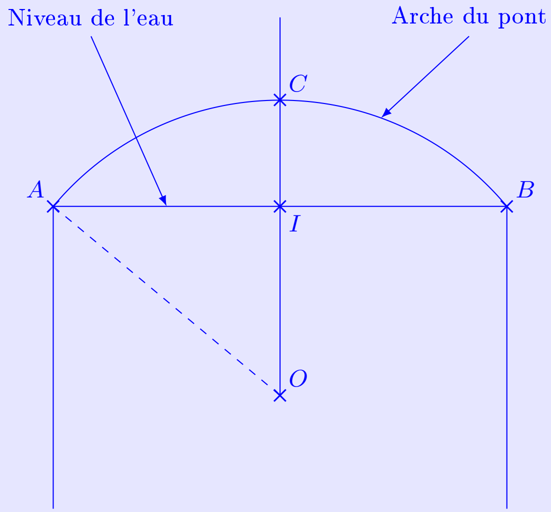
   Démontrez que la hauteur OA du cône d'ombre situé derrière la Terre est de 1 379 642 km par valeur approchée à l'unité près par excès.
2. Calculez le volume du cône d'ombre de sommet A et dont la base est formé par le disque de rayon OB.
3. La distance moyenne Terre-Lune (calculée de centre à centre) est de 382 000 km. Le rayon de la lune est de 1 738 km Étudiez la possibilité d'éclipses totales de la Lune en période de pleine lune.

Exercice 21. Application.

Extrait du C.R.P.E. 2017 (concours de recrutement des professeurs des écoles).

Péniche et pont.

Un pont a une arche en forme d'arc de cercle.
Lors d'une crue, l'eau atteint les sommets A et B des piliers du pont.
La hauteur maximale IC entre le niveau de l'eau et le sommet de l'arche est alors de 5 mètres. L'écartement AB entre les deux piliers du pont est de 24 mètres.
La situation est modélisée par le schéma suivant, qui n'est pas à l'échelle, sur lequel O est le centre de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ et (CO) est l'axe de symétrie de la figure.



1. Montrer que le rayon OA de l'arche est 16,9 m.

On assimile la coupe de la partie émergée d'une péniche, vue de face, à un rectangle de 4 mètres de haut et de 12 mètres de large.

La situation est modélisée par le schéma ci-dessus, qui n'est pas à l'échelle sur lequel on a $EH = 12$ m et $FE = 4$ m.

2. Cette péniche peut-elle passer sous l'arche du pont sans dommages ? Justifier.