Développer factoriser.

I Développer.

1 La boîte à outil pour développer.

2 Développer, ordonner, réduire une expression polynomiale.

3 Exercices.

Exercice 1.

Développez, ordonnez puis réduisez les expressions suivantes.

a) $A(x) = 4x(x+3)$.

b) $B(x) = (3+x)(2x-1)$.

c) $C(x) = (x+3)^2$.

d) $D(x) = (2x-4)^2$.

e) $E(x) = (-x+5)(-x-5)$.

Correction de l'exercice 1

a) En utilisant la distributivité :

$$\begin{aligned} A(x) &= 4x \times x + 4x \times 3 \\ &= 4x^2 + 12x \end{aligned}$$

En utilisant la double distributivité :

$$\begin{aligned} B(x) &= (3+x)(2x+(-1)) \\ &= 3 \times 2x + 3 \times (-1) + x \times 2x + x \times (-1) \\ &= 6x - 3 + 2x^2 - x \\ &= 2x^2 + 6x - x - 3 \\ &= 2x^2 + 5x - 3 \end{aligned}$$

b) Nous utiliserons ici une identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Avec $a = x$ et $b = 3$.

$$\begin{aligned} C(x) &= x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 \\ &= x^2 + 6x + 9 \end{aligned}$$

c) Nous utiliserons ici une identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Avec $a = 2x$ et $b = 4$.

$$\begin{aligned} D(x) &= (2x)^2 - 2\times(2x)\times 4 + 4^2 \\ &= 2^2x^2 - 16x + 16 \\ &= 4x^2 - 16x + 16 \end{aligned}$$

d) Nous utiliserons ici une identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Avec $a = -x$ et $b = 5$.

$$\begin{aligned} E(x) &= (-x)^2 - 5^2 \\ &= x^2 - 15 \end{aligned}$$

Exercice 2. ⚽

Développez, réduisez puis ordonnez les expressions suivantes :

1. $A(x) = (x-1)(x-2)$
2. $B(x) = (x-2)(x^2+3) - (x+2)x^2$
3. $C(x) = (x+5)^2$
4. $D(x) = (x-5)^2$
5. $E(x) = (x+5)(x-5)$
6. $F(x) = (2x-7)^2$
7. $G(x) = (3+2x)^2$
8. $H(x) = (11-x)(11+x)$
9. $I(x) = \left(3x + \frac{5}{6}\right)^2$
10. $J(x) = \left(7x - \frac{1}{3}\right)^2$
11. $K(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{5}{6}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{5}{6}\right)$
12. $L(x) = (5-11x)^2$
13. $M(x) = (12+13x)^2$
14. $N(x) = (9x-4)(4+9x)$
15. $O(x) = \left(10x + \frac{1}{3}\right)^2$
16. $P(x) = (-x+1{,}2)^2$
17. $Q(x) = (0{,}7-x)(0{,}7+x)$
18. $R(x) = (11x-12)^2$

Correction de l'exercice 2

1. $x^2 - 3x + 2$.
2. $x^3 - 2x^2 + 3x - 6 - x^3 - 2x^2 = -4x^2 + 3x - 6$.
3. $x^2 + 10x + 25$
4. $x^2 - 25$.
5. $4x^2 - 28x + 49$
6. $4x^2 + 12x + 9$.

7. $-x^2 - 121$.
8. $9x^2 + 5x + \frac{25}{36}$.
9. $49x^2 - \frac{14}{3}x + \frac{1}{9}$.
10. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{25}{36}$.
11.

Exercice 3. ☯

Développez, ordonnez puis réduisez les expressions polynomiales.

1. $A(X) = (3X+4)(X-5)$,
2. $B(X) = 12(X-3) - 14(X+4)$,
3. $C(X) = 11(X-9) - 7(X-1)$,
4. $D(X) = 28X(3X^2 - 4X + 12)$,
5. $E(X) = 3{,}2X^2(5X^2 - 12X - 1{,}1)$,
6. $F(X) = -2X(3X - X + 2)$,
7. $G(X) = 5X(X-3)$,
8. $H(X) = 3X^2(2X^2 - X + 4)$,
9. $K(X) = (X+3)(X+4)$,
10. $L(X) = (2X+1)(X+2)$,
11. $M(X) = (3X-2)(2X+3)$,
12. $N(X) = (X-5)(X-2)$,
13. $P(X) = (2X-1)(4X+3)$,
14. $Q(X) = (2X-7)^2$,
15. $R(X) = (5X-2)(X+4)$,
16. $S(X) = (3X+1{,}5)(2X-3)$,
17. $T(X) = (5X-7)(0{,}5X-1{,}2)$,
18. $U(X) = (2X-1{,}1)(X+4)$,
19. $V(X) = (X-7)(X+7)$.

Exercice 4.

Développez, ordonnez puis réduisez les expressions polynomiales.

1. $A(x) = (2X-3)^2$,
2. $B(X) = \left[(2X^2-2X+3)-(2X^2+3)\right](5X^2-4X+3)$,
3. $C(X) = (3X-1)(5X-2)+(X+2)^2$,
4. $D(X) = (5X-3)(3X+1)-(2X-4)(-X+5)$,
5. $E(X) = (1{,}5X-5)(1{,}5X+5)-(X-1)^2$,
6. $F(X) = (5X+2)^2-(X-3)^2$,
7. $G(X) = (3X-2)^2-(5-4X)(4-6X)$,
8. $H(X) = (X-1)(2X+3)+(X-1)(X+2)$,
9. $I(X) = (2X-5)(2X+5)$,
10. $J(X) = (3X+1)(7X-2)+(X-2)^2$,
11. $K(X) = (4X-3)(3X+2)-(2X+5)(X-3)$,
12. $L(X) = (1{,}5X-2)(1{,}5X+2)-(X+3)^2$,
13. $M(X) = (3X-2)^2-(X-4)^2$,
14. $N(X) = (3X+1)^2-(5-4X)(2+3X)$,
15. $P(X) = (X-1)(2X+2)+(X-1)(2X+2)$,
16. $Q(X) = (X+1)(X-3)+(X+1)(3X+1)$,
17. $R(X) = (2X-4)(X-1)-(X-2)(3X+2)$,
18. $S(X) = (X-3)(X+2)-(X-2)(2X+1)$,
19. $T(X) = (X+1)(X-4)-(2X+8)(X+5)$,
20. $U(X) = (3X-2)^2-(5X-4)(2+3X)$,
21. $V(X) = (X+2)(2X-3)+(X-1)(X+2)$.

Exercice 5.

Démontrez les égalités proposées, valables pour tout x réel.

1. $(-2x+8)(x-7) = -2x^2+22x-56$,
2. $-9+6x+3x^2 = -3(1-x)(x+3)$,
3. $-3(x-3)^2+3 = -3(x-4)(x-2)$.

Correction de l'exercice 5

Exercice 6. ⚽

Vérifiez que les trois formes proposées, A, B et C, correspondent à une même expression polynomiale.

1. $A(x) = (x-3)(x+5)$.
   $B(x) = x^2 + 2x - 15$.
   $C(x) = (x+1)^2 - 16$.
2. $A(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x - 6$.
   $B(x) = (x - 3\sqrt{2})(x + \sqrt{2})$.
   $C(x) = (x - \sqrt{2})^2 - 8$
3. $A(x) = 2x^2 + 3x - 2$.
   $B(x) = (2x-1)(x+2)$.
   $C(x) = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$.

Exercice 7. ⚽

Est-il possible que $x^2 - 3x + 4$ s'écrive pour tout x réel comme un produit de la forme $(x+1)(ax+b)$ avec a et b réels ?

Correction de l'exercice 7

Nous allons faire une démonstration par analyse-synthèse.

Notons $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

Analyse.

Supposons que $f(x) = (x+1)(ax+b)$.

Comme

$$(x+1)(ax+b) = ax^2 + (a+b)x + b,$$

et donc

$$ax^2 + (a+b)x + ab = x^2 - 3x + 4.$$

L'écriture sous forme développée, réduite et ordonnée étant unique, nous identifions les coefficients :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = -3 \\ b = 4 \end{cases}$$

Et donc : $a = 1$, $b = -4$ et $b = 4$.

Synthèse.

Les seules solutions possibles doivent vérifier à la fois $ab = 1 \times (-4) = -4$ mais aussi $b = 4$ ce qui est impossible donc il n'y a pas de solution au problème.

Il n'est donc pas possible de trouver une écriture de $x^2 - 3x + 4$ de la forme $(x+1)(ax+b)$.

Démonstration plus brève. Raisonnement par l'absurde.

Raisonnons par l'absurde en supposant que nous avons trouvé des nombres a et b tels que pour tout x réel $x^2 - 3x + 4 = (x+1)(ax+b)$.

Alors en particulier, pour $x = -1$, $8 = 0$, ce qui est impossible.

Nous avons donc démontré par l'absurde qu'il n'est pas possible de trouver a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 3x + 4 = (x+1)(ax+b)$.

Exercice 8. ☢

À la calculatrice, une instruction $x \wedge 3$ compte pour 2 multiplications : $x \wedge 3 = x \times x \times x$.

1. **Premier exemple.**
   Soit $f(x) = x^2 + 4x + 3$ sur $\mathbb{R}$ (forme A).
   (a) Vérifiez que $f(x) = 3 + x(x+4)$ pour tout x réel (forme H).
   (b) Combien d'opérations sont effectuées avec la forme A ? avec la forme H ?
   (c) On programme le calcul de $f(x)$ pour x variant de 0 à 2 avec un pas de 0,1. Combien d'opérations sont nécessaires avec chacune des deux formes ?
2. **Deuxième exemple.**
   Reprendre les questions a, b et c de la question 1 pour $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ (forme A) et $f(x) = -1 + x(4 + x(-3 + x(2 + x)))$ (forme H).
3. **Troisième exemple.**
   Soit $f(x) = 4x^7 + 2x^6 + 3x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$.
   (a) Proposer la forme H associée.
   (b) Reprendre les questions 1(b) et 1(c).
4. Quel est le gain obtenu en nombre d'opérations pour $f(x) = x^{50} + x^{49} + x^{48} + \cdots + x^2 + x + 1$?
   On pourra programmer un algorithme pour effectuer un calcul de ce gain.

Correction de l'exercice 8

Cette méthode qui permet d'économiser les calculs et donc d'accélérer les programme informatiques est appelé l'*algorithme de Hörner*.

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 3 + x(x+4) &= 3 + x \times x + x \times 4 \\ &= 3 + x^2 + 4x \\ &= x^2 + 4x + 3 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

   (b) Avec la forme A : $x \times x + 4 \times x + 3$. Il y a donc 4 opérations.
   Avec la forme H : $3 + x \times (x+4)$. Il y 3 opérations.
   (c) Il faut faire les calculs pour 0, 0,1, 0,2, ..., 2. Il faut donc calculer 21 images par f.

Avec la forme H il faudra donc faire 21 fois 4 opérations, c'est-à-dire 81 opérations.
Avec la forme A il faudra donc faire 21 fois 3 opérations, c'est-à-dire 63 opérations.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
-1+x(4+x(-3+x(2+x))) &= -1+x(4+x(-3+x\times 2+x\times x)))\\
&= -1+x(4+x(x^2+2x-3))\\
&= -1+x(4+x\times x^2+x\times 2x-x\times 3)\\
&= -1+x(x^3+2x^2-3x+4)\\
&= -1+x\times x^3+x\times 2x^2-x\times 3x+x\times 4)\\
&= x^4+2x^3-3x^2+4x-1\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

(b) Forme A : 13 opérations.
Forme H : 7 opérations.

(c) Forme A : 273 opérations.
Forme H : 147 opérations.

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 4x^7+2x^6+3x^5-4x^4+2x^3-3x^2+4x-1\\
&= -1+4x-3x^2+2x^3-4x^4+3x^5+2x^6+4x^7\\
&= -1+x(4-3x+2x^2-4x^4+3x^4+2x^5+4x^6)\\
&= -1+x(4+x(-3+2x-4x^2+3x^3+2x^4+4x^5))\\
&= -1+x(4+x(-3+x(2-4x+3x^2+2x^3+4x^4)))\\
&= -1+x(4+x(-3+x(2+x(-4+3x+2x^2+4x^3))))\\
&= -1+x(4+x(-3+x(2+x(-4+x(3+2x+4x^2)))))\\
&= -1+x(4+x(-3+x(2+x(-4+x(3+x(2+4x))))))
\end{aligned}$$

(b) Forme A : 35 opérations.
Forme H : 14 opérations.

(c) Forme A : 735 opérations.
Forme H : 294 opérations.

4.

$1+x$	1
$1+x+x\times x$	3
$1+x+x\times x+x\times x\times x$	6
$1+x+x\times x+x\times x\times x+x\times x\times x\times x$	10

De proche en proche on obtient : $1 + 2 + 3 + 4$.

Il faut donc calculer $S = 1 + 2 + \cdots + 50$.

Nous utilisons l'astuce usuelle pour la somme des entiers naturels. Nous écrivons deux fois la somme et nous additionnons terme à terme

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & +2 & +3 & +\dots & +48 & +49 & +50 \\ 50 & +49 & +48 & +\dots & +3 & +2 & +1 \\ \hline 51 & +51 & +51 & +\dots & +51 & +51 & +51 \end{array}$$

Ainsi $2S = 50 \times 51$. Enfin : $S = \frac{50\times51}{2} = 1275$.

Exercice 9. ☢

Soit x un nombre réel différent de 1, démontrez que

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{1 - x^5}{1 - x}.$$

Correction de l'exercice 9

Il est possible d'utiliser le produit en croix.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Démontrer :

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{1 - x^5}{1 - x}$$

équivaut à démontrer :

$$\left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right)(1 - x) = \frac{1 - x^5}{1 - x}(1 - x)$$

Or :

$$\begin{aligned} &\left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right)(1 - x) \\ &= 1\times x^4 + 1\times x^3 + 1\times x^2 + 1\times x + 1\times 1 - x\times x^4 + x\times x^3 - x\times x^2 - x\times x - x\times 1 \\ &= 1 - x^5 \end{aligned}$$

II Factoriser.

1 La boîte à outils.

Exercice 10.

Recopiez et complétez

1. $(2x + \dots)^2 = 4x^2 + \dots + 9$
2. $(x - \dots)^2 = x^2 - 6x + \dots$
3. $(\dots + 3)^2 = \dots + 24t + 9$
4. $(x - \dots)^2 = x^2 - x + \dots$
5. $(x \dots)^2 = x^2 + \dots + 16$
6. $(x \dots)^2 = x^2 - 8x + \dots$
7. $(\dots + 3)^2 = \dots + t + 9$
8. $(\dots - 4)^2 = \dots - 4x + \dots$

Correction de l'exercice 10

1. $(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$
2. $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$
3. $(4t+3)^2 = 16t^2 + 24t + 9$
4. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$
5. $(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$
6. $(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$
7. $\left(\frac{1}{6}t + 3\right)^2 = \frac{1}{36}t^2 + t + 9$
8. $\left(\frac{1}{2}x - 4\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 - 4x + 16$

Exercice 11.

Factorisez les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
A &= 2x + 2y \\
B &= 7y - 7x \\
C &= bc + 2b \\
D &= 91z - 13t \\
E &= xa + ay \\
F &= x^2 + xy \\
G &= a^3 + a^2 \\
H &= ab + a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= (x-2)(x+3) + (5-x)(2-x) \\
J &= (x-3)(x+1) - 3(3-x)^2 \\
K &= x^2 + 6x + 9 \\
L &= 25x^2 - 40x + 16 \\
M &= x^2 - 1 \\
N &= x^2 + 2x + 1 \\
O &= x^2 - 2x + 1 \\
P &= (x+1)(x+2) - 5(x^2 + 4x + 4)
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 11

$$
\begin{aligned}
A &= 2(x+y) \\
B &= 7(y-x) \\
C &= b(c+2) \\
D &= 13(7z-1) \\
E &= a(x+y) \\
F &= x(x+y) \\
G &= a^2(a+1) \\
H &= a(b+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I &= (x-2)(2x-2) \\
J &= (x-3)(-2x+4) \\
K &= (x+3)^2 \\
L &= (5x-4)^2 \\
M &= (x-1)(x+1) \\
N &= (x+1)^2 \\
O &= (x-1)^2 \\
P &= (x+1)(-4x-7)
\end{aligned}
$$

2 Exercices.

Exercice 12. ⚽

Factorisez les expressions données.

1. $2x(x-1)+3x$
2. $(x+1)(x+2)+5(x+2)$
3. $3x^2+9x$
4. x^2-6x
5. $8x^2-5x$
6. $3x+4xy$
7. $3x^2+x$
8. $(2x+1)^2-(2x+1)(x+3)$
9. $3x(x-5)-x$
10. $xy+xz$
11. $x^2(x+4)-2x(x+4)$
12. $(x-3)^2-2(x-3)(2x-1)$
13. $5x^2-6x$
14. $3xy+x$
15. $2(x+1)^2-3(x+1)$
16. $(x+1)^2+x+1$
17. x^2+2x+1
18. $(2x-5)^2-x^2$
19. $9x^2+12x+4$
20. $(2x-1)^2-(x-3)^2$

21. $(2x+1)^2-(1-x)^2$
22. $x^2-20x+100$
23. $25-(x+1)^2$
24. $4x^2+4+8x$
25. $16(x+1)^2-25x^2$
26. $16x^2-81$
27. $b^2-3b+\frac{9}{4}$
28. $(a-1)^2-2$
29. $x^2-4+(x-2)(x+1)$
30. $3x^2-12x+12$
31. $x^2+3x+(x+3)^2$
32. $(x+1)(x+2)-(3x+6)$
33. $2x(x+3)+4x+12$
34. $(x-3)(3x-4)-3x+4$
35. $xy-xz-y(y-z)$
36. $-x^2+8x-16$
37. $7x^2-14x$
38. $16x^2-81$
39. $2a^2b-b$
40. $4x^2-4x+1$

41. $2(x-1)^2+3x-3$
42. $2x^2+8x+8$
43. $x^2-16+(x-4)^2$
44. $5x^2-125$
45. $4x^2-12x+9$
46. $7x^2-28$
47. $(2x-3)^2-(5x+2)^2$
48. $(x-5)^2-2(x-5)(x-3)$
49. $2x^2+7x$
50. $x^2+26x+169$
51. $(9x^2-25)+(6x+10)$
52. $x^2-4x+4-(x-2)(7-x)$

Correction de l'exercice 12

1. $x(2x+1)$
2. $(x+2)(x+6)$
3. $3x(x+3)$
4. $x(x-6)$
5. $x(8x-5)$
6. $x(3+4y)$
7. $x(3x+1)$
8. $(2x+1)(x-2)$
9. $x(3x-16)$
10. $x(y+z)$
11. $x(x+4)(x-2)$
12. $(x-3)(-3x-1)$
13. $x(5x-6)$
14. $x(3y+1)$
15. $(x+1)(2x-1)$
16. $(x+1)(x+2)$
17. $(x+1)^2$
18. $(x-5)(3x-5)$
19. $(3x+2)^2$
20. $(x+2)(3x-4)$

21. $3x(x+2)$
22. $(x-10)^2$
23. $(-x+4)(x+6)$
24. $4(x+1)^2$
25. $(-x+4)(9x+4)$
26. $(4x-9)(4x+9)$
27. $\left(b-\frac{3}{2}\right)^2$
28. $(a-1-\sqrt{2})(a-1+\sqrt{2})$
29. $(x-2)(2x+3)$
30. $3(x-2)^2$
31. $(x+3)(2x+3)$
32. $(x-2)(x+2)$
33. $2(x+3)(x+2)$
34. $(3x-4)(x-4)$
35. $(x-y)(y-z)$
36. $-(x-4)^2$
37. $7x(x-2)$
38. $(4x-9)(4x+9)$
39. $(2a^2-1)b$
40. $4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

41. $(x-1)(2x+1)$
42. $2(x+2)^2$
43. $2x(x-4)$
44. $5(x-5)(x+5)$
45. $4(x-3)^2$
46. $7(x-2)(x+2)$
47. $(-3x-5)(7x-1)$
48. $(x-5)(-x+1)$
49. $x(2x+7)$
50. $(x+13)^2$
51. $3(3x+5)(x-1)$
    Correction : M. Illien
52. $(x-2)(2x-9)$
    Correction : M. Assenjee

Exercice 13. ⚽

Résolvez l'équation :

$$(E) \quad x^2 = 6x - 9.$$

Correction de l'exercice 13

Résolvons l'équation (E).

Très souvent pour résoudre une équation qui n'est pas linéaire en mathématique nous essayerons de ramener l'équation à une équation produit-nul (donc égale à 0).

Nous nous ramenons à une équation produit :

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow x^2 - (6x-9) = 6x - 9 - (6x-9)\\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0\\ &\Leftrightarrow x^2 - 2\times 3\times x + 3^3 = 0\\ &\Leftrightarrow (x-3)^2 = 0\end{aligned}$$

Résolvons l'équation produit :

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow x - 3 = 0 \text{ ou } x - 3 = 0\\ &\Leftrightarrow x = 3\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l' équation (E) est : $\mathcal{S} = \{3\}$.

Nous verrons plus tard dans l'année que pour résoudre une inéquation nous nous ramèneront à une inéquation produit en factorisant.

Exercice 14. ⚽

Étant donnée la fonction $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2-1}{x-1}\end{array}\right.$ simplifiez son expression.

Correction de l'exercice 14

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Pour simplifier une fraction il faut faire apparaître un facteur commun au numérateur et au dénominateur. Ils faut donc les factoriser. Ici on observe une identité remarquable.

$$\begin{aligned}\frac{x^2-1}{x-1} &= \frac{x^2-1^2}{x-1}\\ &= \frac{(x-1)\times(x+1)}{1\times(x-1)}\\ &= x+1\end{aligned}$$

Exercice 15.

Soit f la fonction définie sur $[2\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x^4 - 4x^3 + 4x^2}}$$

Exprimez $f(x)$ de façon plus simple.

Correction de l'exercice 15

Simplifions l'expression de f.

Soit $x \in [2; +\infty[$.

$$\begin{aligned} x^4 - 4x^3 + 4x^2 &= x^2(x^2 - 4x + 4) \\ &= x^2(x-2)^2 \end{aligned}$$

Puisque $x \geq 2$

$$\sqrt{x^2(x-2)^2} = x(x-2).$$

Et donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1 + x(x-2)} \\ &= \sqrt{x^2 - 2x + 1} \\ &= \sqrt{(x-1)^2} \end{aligned}$$

comme $x \geq 2$

$$f(x) = x - 1$$

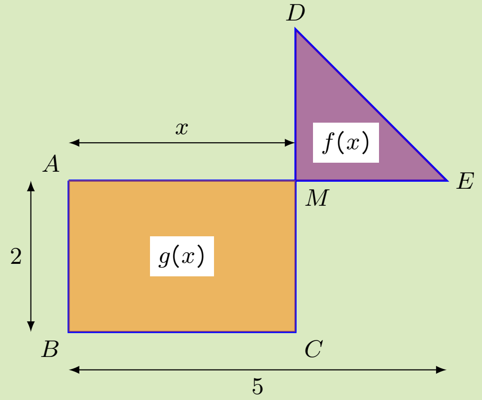
Quelque soit $x \in [2; +\infty[$,

$$f(x) = x - 1.$$

Exercice 16.

Sur un segment $[AE]$ est placé un point M mobile. Un rectangle $ABCM$ et un triangle isocèle rectangle en M, MED, sont construits comme sur la figure ci-contre.

1. Calculez l'aire $f(x)$ de MED.
2. Calculez l'aire $g(x)$ de $ABCM$.
3. Trouvez pour quelle(s) valeur(s) de x les aires du rectangle et du triangle sont égales.



Correction de l'exercice 16

1. Déterminons une formulation algébrique de f.

   Remarquons tout d'abord que

$$\left.\begin{aligned} M &\in [AE] \\ AE &= 5 \\ x &= AE \end{aligned}\right\} \Rightarrow x \in [0;5].$$

   Autrement dit le domaine de définition de f est $\mathscr{D}_f = [0;5]$.

   Soit $x \in [0;5]$.
   MED étant rectangle en M :

$$f(x) = \frac{1}{2} \times ME \times MD$$

   Puisque MED est isocèle en M :

$$f(x) = \frac{1}{2} ME^2$$

   Enfin, puisque $M \in [AE]$:

$$f(x) = \frac{1}{2}(5 - x)^2$$

   Pour tout $x \in [0;5]$: $f(x) = \frac{1}{2}(x-5)^2$.

2. Déterminons une formulation algébrique de g.

   Soit $x \in [0;5]$.
   $ABCM$ est un rectangle donc

$$\begin{aligned} g(x) &= AB \times BC \\ &= 5 \times x \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [0;5] : g(x) = 5x}$$

3. Je réinterprète la question en la traduisant par une équation :

   Résolvons dans $[0;5]$ l'équation : $f(x) = g(x)$.

   Soit $x \in [0;5]$.

$$f(x) = g(x)$$

équivaut successivement à

$$\frac{1}{2}(5-x)^2 = 2x$$

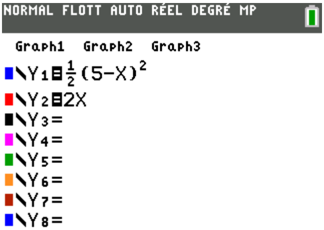
Un peu de méthode. Il ne s'agit visiblement pas d'une équation linéaire (un x est élevé au carré), il faut donc faire apparaître une équation produit-nul. Si on veut un produit il faut donc factoriser.

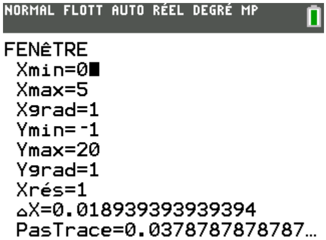
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(5-x)^2 - 2x &= 2x - 2x \\ \frac{1}{2}(5-x)^2 - 2x &= 0 \end{aligned}$$

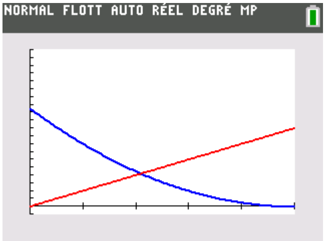
Rappelons que nous essayons d'abord de trouver un facteur commun, sinon une identité remarquable ou encore une factorisation partielle. Mais rien de tout ceci ne semble fonctionner. Developpons tout avant d'esayer à nouveau de factoriser.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(5^2 - 2 \times 5 \times x + x^2\right) - 2x &= 0 \\ \frac{1}{2}\left(25 - 10x + x^2\right) - 2x &= 0 \\ \frac{1}{2}x^2 - 7x + \frac{25}{2} &= 0 \end{aligned}$$

À partir de là nous bloquons. Nous ne voyons pas comment factoriser. Ceci dit nous pouvons néanmoins conjecturer l'ensemble des solutions avec la calculatrice.
Représentons graphiquement les courbes représentatives des fonctions f et g avec la calculatrice :







Il semblerait que les aires soient égalent pour une unique valeur de x qui est approximativement de 2,12.

La méthode générale de résolution de ce type d'équation (équation polynomiale de degré deux) est au programme de première.