Puissances.

I Définition.

Définition 1

Si x est un nombre et n un entier naturel, alors x^n, qui se lit « x puissance n » ou « x exposant n », est le nombre

$$x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$$

Remarques.

1. $x^0 = 1$ et $x^1 = x$.
2. Lorsque l'exposant est 2 comme dans x^2 on dit « x au carré ».
3. Lorsque l'exposant est 3 comme dans x^3 on dit « x au cube ».
4. Par convention, si x est non nul, nous noterons son *inverse*

   $$x^{-1} = \frac{1}{x}$$

   En généralisant nous noterons pour n entier naturel

   $$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

5. D'après cette définition et du fait de la règle du signe d'un produit : lorsque l'exposant n est pair x^n est positif et lorsque l'exposant n est impair x^n est du même signe que x.

II Puissance et opérations.

Priorités opératoires.

Les règles de priorités pour l'instant se limitent à :

Priorité 1 Les calculs entre parenthèses ou crochets. S'il y a des parenthèses emboîtées les plus emboîtées sont prioritaires. La barre de fraction joue le même rôle que des parenthèses.

Priorité 2 Les exposants (puissances).

Priorité 3 Les multiplications et division $(\div)$ en allant de gauche à droite.

Priorité 4 Les additions et soustractions en allant de gauche à droite.

Produits et quotients de puissances d'un même nombre.

Proposition 1

Soient a un nombre, n et p deux entiers relatifs.

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \qquad\qquad (a^n)^p = a^{n\times p}$$

Remarques.

1. Ce résultats concerne les puissances d'un même nombre a.
2. Ce résultat sera très important pour développer les expressions algébriques faisant intervenir des lettres qu'il est impossible d'évaluer numériquement : $x^2(x-1) = x^2(x^1-1) = x^2 \times x - x^2 \times 1 = x^{2+1} - x^2 = x^3 - x^2$.
3. Il n'y a pas de résultat équivalent avec l'addition. Par exemple : $3^2 + 3^3 = 36$ et $3^{2+3} = 243$. Les puissances d'une somme s'obtiennent avec des formules comme la distributivité, la double distributivité, les identités remarquables.

Exercice 1

Simplifiez les expressions suivantes en justifiant :

1. $A = 12^4 \times 12^{-7}$.
2. $B = \left(3^2\right)^7$.
3. $C = 3^2 \times \left(3^{-6}\right)^2$.
4. $D = n^4 \times (p^3 \times n)^3$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$.

Vérifiez vos calculs en entrant exactement les formules dans votre calculatrice.

Puissance de produits et quotient.

La proposition suivante montre le lien entre les fonctions puissances et les multiplications ou divisions.

Proposition 2

Soient a et b deux nombres, et n un entier naturel.

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

et si b est non nul :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Remarques.

1. Ce résultat concerne une même puissance de différents nombres.

Exercice 2

Complétez les égalités suivantes (en justifiant) :

1. $7^2 \times (3 \times 7)^5 = 3^? \times 7^?$
2. $\left(\dfrac{4^2}{5}\right)^3 = 4^? \times 5^?$
3. $\dfrac{11^2 \times 7}{2 \times 3} = 2^? \times 3^? \times 7^? \times 11^?$
4. $10^? \times 10^{-2} = 1$

III Exercices.

Exercice 3

Les *nombres premiers* sont des entiers naturels supérieurs (ou égaux) à 2 qui ne sont divisibles que par eux-même et 1.

Il y a une infinité de nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ... Liste de nombres premiers et décompositions en facteurs premiers pour la calculatrice sont en téléchargement.

Théorème 1 - Théorème fondamental de l'arithmétique.

Tout entier strictement positif peut être écrit comme un produit de nombres premiers d'une unique façon, à l'ordre près des facteurs.

Par exemple : $12 = 2^2 \times 3$.

1. Déterminez la décomposition en facteurs premiers de 138 600 puis de 147 420.
2. Déduisez-en, sans calculatrice, la forme irréductible de la fraction $\dfrac{138\,600}{147\,420}$.

Exercice 4

L'écriture décimale infinie d'un nombre comporte un grand nombre de chiffres zéros. Par exemple $2 = \ldots 0\,002{,}000\ldots$. Or, dans cet exemple, il n'y a qu'un seul chiffre qui contienne de l'information ; nous dirons que 2 est *significatif*.

Les physiciens ont adoptés une écriture des nombres qui prend en compte la notion de chiffre significatif :

Définition 2

La *notation scientifique* (ou *écriture scientifique*) d'un nombre décimal est l'écriture de ce nombre sous la forme $a \times 10^n$, le nombre a ne possédant qu'un chiffre non nul avant la virgule ($1 \leq a < 10$) et n un entier.

Par exemple : $1\,234{,}567\,8 = 1{,}234\,567\,8 \times 10^3$.

1. Donnez la notation scientifique des quatre nombres 123 400 000, 0,000 123, 451 et 92 384.
2. Déterminez, sans calculatrice, l'écriture en notation scientifique du nombre

$$\frac{2 \times 10^{3} \times 2{,}4 \times 10^{-6}}{1{,}2 \times 10^{-10} \times 8 \times 10^{12}}$$

3. Arrivés en fin de vie, certaines étoiles explosent violemment. Ce phénomène, appelé supernova, entraîne une forte augmentation de l'intensité lumineuse de l'astre qui peut briller comme 200 millions de soleils pendant plusieurs semaines.
   Exprimez en notation scientifique et sans user de la calculatrice, le rapport maximal entre l'intensité lumineuse d'une supernova et celle du soleil.

Exercice 5 pour s'entraîner.

L'*analyse dimensionnelle* est un outil qui permet d'étudier les égalités ou les formules faisant intervenir des grandeurs physiques, et donc des unités différentes.

Rappelons quelques grandeurs et unités du système international.

Grandeur	Dimension	Unité du SI
Masse	M	kilogramme (kg)
Temps	T	seconde (s)
Longueur	L	mètre (m)
Température	θ	kelvin (K)
Intensité électrique	I	ampère (A)
Quantité de matière	N	mole (mol)
Intensité lumineuse	J	candela (cd)

À partir de ces unités de base il est possible de construire des unités dérivées. Ainsi la vitesse v, qui est le rapport de la distance parcourue sur le temps écoulé, a pour dimension

$$[v] = L.T^{-1} = \left(\frac{L}{T}\right)$$

et donc l'unité de mesure de la vitesse dans le système international est

$$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}.$$

L'analyse dimensionnelle permet de vérifier l'homogénéité d'une formule ou d'un égalité en s'assurant que la dimension est la même des deux côtés de l'égalité.

1. Sachant que l'accélération d'un objet est donnée par la formule

$$a = \frac{v}{t}$$

   où v désigne la vitesse de l'objet et t le temps écoulé, donnez la dimension de l'accélération et l'unité du système international qui permet de la mesurer.
2. Un élève propose l'équation suivante pour calculer la distance parcourue, x, par un objet :

$$x = vt^{2}$$

   où v désigne la vitesse de l'objet et t le temps écoulé.
   Vérifiez l'homogénéité de cette équation (en cherchant la dimension de chaque membre de l'égalité) puis dites si cette équation est possible.

3. Le *principe fondamental de la dynamique* (ou *deuxième loi de Newton*) indique qu'un objet subit une accélération a qui est donné par

$$a = \frac{F}{m}$$

où F est la force, exprimée en newton (N) (unité qui mesure l'intensité d'une force), qui s'applique à l'objet et m la masse de cet objet.

Déterminez la dimension de la force, $[F]$, puis exprimez le newton (N) comme unité dérivée du système international.

4. La force d'interaction gravitationnelle entre deux corps de masses m_1 et m_2 distants de d (la Terre et la Lune par exemple) est donnée par la relation

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

où G est une constante appelée *constante gravitationnelle*.

Déterminez la dimension, $[G]$, puis l'unité dans le système international de la constante gravitationnelle.

5. Cherchez l'erreur dans le raisonnement suivant :

   (a) Prenez d'abord : 1 kilogramme égale 1000 grammes et 2 kilogrammes égale 2000 grammes

   (b) Multiplions chaque masse en kilo entre elles puis de même pour celles en grammes. On a donc l'égalité : 1×2 kg $= 1000 \times 2000$ g.

   (c) Ce qui fait donc : 2 kg $= 2\,000\,000$ g

   (d) Soit en changeant d'unité 2 kg $= 2000$ kg.

6. Le nombre d'or est obtenu comme le rapport de la largeur sur la longueur d'un certain rectangle.

Quelle est la dimension du nombre d'or ? Quelle est l'unité du système international qui permet de l'exprimer ?