Ensembles de nombres.

I Le dévissage de l'ensemble des nombres (les matriochka).

À cette étape de votre scolarité les nombres ont de multiples formes : nombres entiers, écritures décimales, fractionnaires, écritures scientifiques.

Faisons un peu de ménage dans cet embrouillamini.

1 Une histoire des nombres.

Les premiers nombres servaient à dénombrer, c'est-à-dire à compter les objets : 1, 2, 3, et ainsi de suite. Si cela nous paraît naturel, que l'on songe à l'effort de conceptualisation qu'il fallut faire pour considérer qu'il y avait quelque chose de commun entre 3 souris et 3 éléphants.

Le nombre est un objet qui ne se préoccupe pas de ce qu'on observe. Il n'est associé à aucune sorte particulière d'objets à aucune unité de mesure.

Il fallut faire des partages et les fractions firent leur apparition. Mais dans un premier temps il s'agissait de méthodes de calcul et non de nombres. Ainsi dans l'antiquité grecque les fractions étaient considérées comme des ratios c'est-à-dire des rapports entre des longueurs et non comme des nombres ; il s'agissait d'un lien ente deux nombres et non d'un unique nombre. Mais les Grecs furent embêtés par un nombre qui n'existait pas : $\sqrt{2}$. En effet, s'il est possible de dessiner cette longueur, il est impossible de l'exprimer dans un ratio avec les nombres entiers (nombres incommensurables).

Il fallut très longtemps pour que l'absence d'objet put être considérée comme un nombre. Les nombres sont nés pour la comptabilité et la géométrie (au sens littéral de mesure de la Terre) domaines qui s'intéresse à ce qui est, et non à ce qui n'est pas. Inventé dès le VII^{e} siècle en Inde le zéro n'apparaît en Europe qu'au X^{e} siècle.

Si conceptuellement l'acceptation du zéro fut difficile, son utilisation combinée à celles des chiffres arabes pour écrire les nombres fit florès.

Il existait des systèmes décimaux depuis le III^{e} siècle avant Jésus-Christ mais l'écriture était lourde. Si α avait représenté le nombre 1 et β le nombre 10 voici comment les égyptiens auraient écrit 43 : $\beta\beta\beta\beta\alpha\alpha\alpha$.

Grâce à l'emploi du zéro positionnel nous avons notre système d'écriture : sans les zéros qui le suivent nous ne pourrions pas savoir que le 1 dans l'écriture 100 représente une centaine.

Le zéro positionnel permet de manipuler avec une grande aisance les fractions dont le dénominateur est une puissance de 10 ; ce que les élèves appellent « les chiffres après la virgule ».

Les nombres négatifs ne furent acceptés qu'au XVIII^{e} siècle. Ils furent découvert et utilisés bien avant mais leur acceptation en tant que nombre nécessitait de dépasser un grand nombre de paradoxes.

Nous avons donc, au terme de cette évolution, trois écritures des nombres : les nombres entiers, les nombres fractionnaires et les nombres avec une écriture décimale (auxquelles ont pourrait rajouter l'écriture scientifique ou l'écriture ingénieur mais ce sont des écritures qui servent essentiellement pour les valeurs approchées). À ces trois principales écritures se rajoute le signe puisque à chaque nombre positif lui correspond son opposé en négatif.

2 Comparer des nombres.

Puisqu'il y a différentes écriture, il y a un risque qu'un nombre puisse avoir plusieurs écritures et que nous soyons incapables de nous en rendre compte. Il faut être capable de distinguer les nombres ; en mathématique nous dirons comparer.

Comparer deux nombres a et b c'est dire laquelle des trois possibilités suivantes, qui s'excluent mutuellement, est vraie : $a = b$, $a < b$ et enfin $a > b$.

Ceci revient à chercher le signe de la différence $a - b$.

Exemples.

Nous avons vu au collège différentes façons de faire ces soustractions mais le plus souvent il s'agit de se ramener à une différence de fractions.

1. $a = 3$, $b = 1000$,
2. $a = 17$ et $b = 16,80$.
3. $a = 34,07$ et $b = 34,7$.
4. $a = 4,3$ et $b = \frac{2}{10}$.
5. $a = 5$ et $b = \frac{1}{3}$.

Les écritures décimales ne sont pas forcément finie. Ainsi $\frac{1}{3}$ a une écriture décimale infinie : $\frac{1}{3} = 0,333\dots$.

Remarquons que nous ne pouvons pas utiliser les écritures décimales infinies sans un certain risque puisque : $0,333\cdots + 0,333\dots 0,333\cdots = 1$. Pourtant nous serions tentés de dire que $0,999\cdots < 1$.

Nous voyons avec ce dernier exemple que si nous devions retenir une seule méthode générale pour comparer les nombres ce serait de faire la différence de leur écriture fractionnaire.

Les grecs de l'antiquité qui manipulaient uniquement des fractions furent néanmoins confrontés à une difficulté : $\sqrt{2}$. C'est bien un nombre puisque c'est une longueur mais ce n'est pas une fraction (ce qui sera démontré dans la leçon traitant des multiples et diviseurs).

Autrement dit tous les nombres ne peuvent pas s'écrire sous forme de fractions.

Il a fallut commencer à penser à ranger les nombres pour y voir clair et repérer ceux qui manquaient.

3 Les ensembles classiques de nombres.

Pour ranger les nombres nous nous basons essentiellement sur le type d'équation algébriques dont ils sont solutions.

Les *entiers naturels* sont les nombres qui servent à dénombrer, à compter. L'ensemble de tous les entiers naturels est :

$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$$

Exemples.

1. 10^{13} est une entier naturel. Nous écrirons $10^{13} \in \mathbb{N}$.
2. Si $n \in \mathbb{N}$ alors $2n$ est un nombre pair positif et $2n + 1$ est un nombre impair positif.

•

Si nous voulons résoudre une équation de la forme $x + a = 0$ où $a \in \mathbb{N}$ nous devons ajouter de nouveaux entiers.

Les *entiers (relatifs)* sont les entiers naturels et leurs *opposés*. L'ensemble de tous les entiers (relatifs) est :

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$$

Exemples.

1. $-123 \in \mathbb{Z}$.
2. $123 \in \mathbb{Z}$.
3. $0 \in \mathbb{Z}$.

Remarques.

1. Il est possible de reconnaître un nombre entier par l'un de ses développements décimaux infinis. En effet l'une de ses écritures décimales ne comporte que des 0 dans la partie décimale. Par exemple : $1,000\ldots$ et $-234,000\ldots$.

Proposition 1

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ mais $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$.

Démonstration

il y a deux choses à démontrer.

* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ par construction puisque nous avons jouter des éléments à $\mathbb{N}$ pour obtenir $\mathbb{Z}$.
* Pour montrer que $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$ il suffit de montrer qu'il existe (au moins) un nombre entier relatif qui n'est pas un entier naturel. -1 n'est pas égale à 0 car sinon $1 = 0$ et n'est pas égale à un entier naturel strictement supérieur à 0 car sinon $1 + (-1)$ ne serait pas nul.

■

•

Les nombres qui peuvent s'écrire comme des quotients d'entiers sont appelés des *nombres rationnel*. L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Proposition 2

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ mais $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$.

Démonstration

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. $n = \frac{n}{1}$ donc n peut s'écrire comme un rationnel et donc $n \in \mathbb{Q}$. Ceci étant vrai quelque soit le nombre n choisi : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
2. $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ mais $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$. En effet $0 < \frac{1}{3} < 1$.

■

Remarques.

1. Il est possible de reconnaître un nombre rationnel par son développement décimal infini. En effet celui-ci est nécessairement périodique (à partir d'un certain rang. Par exemples : $0,333\dots$, $-12,343434\dots$ et $3,000\dots$ sont des nombre rationnels.

Il n'y a pas de solution à l'équation $x^2 - 2 = 0$ dans $\mathbb{Q}$. Il faut donc agrandir encore notre ensemble.

L'ensemble de tous les nombres que vous devez connaître est appelé *l'ensemble des nombres réels* et est noté $\mathbb{R}$.

Proposition 3

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ mais $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q}$.

Démonstration

1. L'inclusion découle du fait que $\mathbb{R}$ est construit à partir de $\mathbb{Q}$ en ajoutant d'autres nombre.
2. $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. L'irrationalité de $\sqrt{2}$ sera pour l'instant admise.

■

Exemples.

1. Si $n \in \mathbb{N}$ et si n n'est pas un carré parfait alors $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.
2. $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Remarques.

1. Les nombres qui ne sont pas réels sont appelés des *nombres irrationnels*.
2. Il est possible de reconnaître un nombre irrationnel à son développement décimal infini : celui-ci ne comporte aucune périodicité (aucune répétition jusqu'à l'infini d'une série de chiffres). Par exemple π et $\sqrt{2}$ ont des développements décimaux infinis sans aucune répétition.

   Ces pour cette raison que les nombres irrationnels ne sont jamais présenté par leur écriture décimale mais par des lettres ou des symboles. Certains sont célèbres : π (pi), φ (nombre d'or), γ (constante d'Euler), e (constante de Neper), $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ...

•

Il reste une ensemble classique de nombre que nous n'avons pas évoqué c'est *l'ensemble des nombres décimaux* que nous noterons $\mathbb{D}$. Si cet ensemble a eu droit à un nom et une notation personnalisée c'est à cause de son importance pour les sciences expérimentales, en informatique et en mathématique pour donner des valeurs approchées de nombres irrationnels.

Un nombre est décimal s'il est possible de l'écrire sous forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10.

Exemples.

1. $-0,1 \in \mathbb{D}$.
2. $\frac{9078687656}{100} \in \mathbb{D}$.

3. Les nombres décimaux sont ceux qui admettent une écriture décimale finie.
4. Les nombres décimaux sont ceux qui admettent une écriture fractionnaire de la forme $\frac{a}{2^p \times 5^n}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $n, p \in \mathbb{N}$.

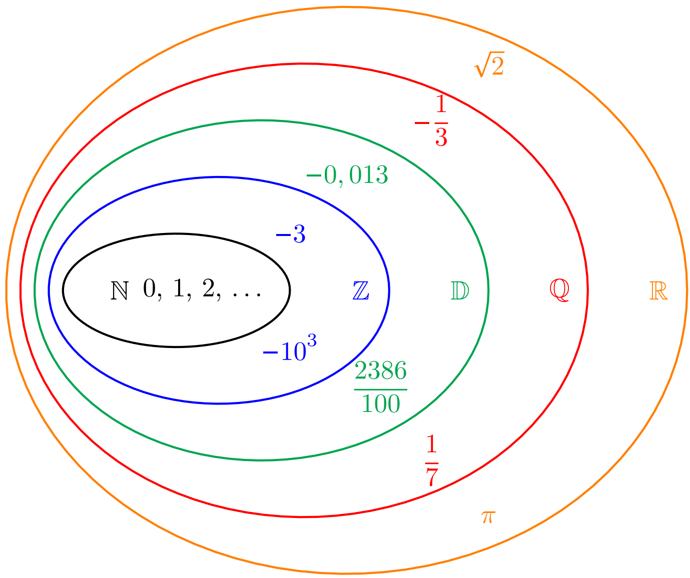
Remarques.

1. Un nombre est décimal s'il admet un développement décimal infini ne comportant que des zéros à partir d'un certain rang. Par exemple : $2,34000\ldots$ et $-0,088000\ldots$.
2. Un nombre est décimal s'il admet une écriture fractionnaire dont le numérateur est un entier et le dénominateur le produit d'une puissance de deux et d'une puissance de 5.

Proposition 4

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$ et $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, mais $\mathbb{D} \not\subset \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{D}$.

Nous pouvons résumer les inclusions entre les ensembles classiques étudiés avec un diagramme de Venn qui schématise la chaîne d'inclusion : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



Il existe une multitude d'ensembles de nombres classiques. On distingue notamment les nombres algébriques et transcendants.

Il existe de plus gros ensembles de nombres que $\mathbb{R}$ ainsi $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres complexes qui permet d'ajouter les solutions des équations polynomiales sans solutions dans $\mathbb{R}$ comme $x^2 + 1 = 0$.

Il existe aussi de nombreux sous-ensembles des entiers. Par exemple l'ensemble des nombres premiers que vous connaissez déjà mais aussi les nombres triangulaires, les nombres parfaits, ...

4 Exercices.

Exercice 1.

Déterminez sans justification le plus petit ensemble classique auquel appartient le nombre proposé.

a) $\sqrt{17}$.
b) $-34\,509\,786$.
c) $-0,0223$.
d) $34,45218\ldots$.
e) $\dfrac{345}{100}$.
f) $\dfrac{24}{7}$.
g) $\dfrac{34}{2^3 \times 5^2}$.
h) $\dfrac{\frac{1}{3}}{14}$.
i) $3,234 \times 10^{45}$.
j) $\pi + 3$.

Exercice 2.

Déterminez sans justification le plus petit ensemble classique auquel appartient le nombre proposé.

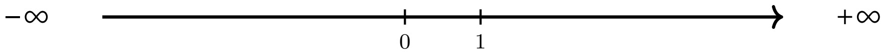
a) $-\dfrac{12}{3}$.
b) $-23{,}723\,723\,7\ldots$.
c) $\dfrac{76987}{10}$.
d) π.
e) $\sqrt{3}^2$.
f) $0,987654321 \times 10^9$.
g) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
h) $\dfrac{2}{250}$.
i) $3 + \sqrt{2}$.
j) $\dfrac{1}{5}$.

II Une représentation géométrique de l'ensemble des nombres.

1 La droite des réels.

Si on essaie de dessiner les nombres rationnels sur un axe gradué il semble que nous recouvrions tout l'axe. Nous savons que c'est une illusion : non seulement il manque une infinité de nombres rationnels mais il manque aussi les nombres irrationnels.

Nous représenterons l'ensemble des nombres réels par axe gradué. Cette représentation présentation un avantage sur le diagramme de Venn c'est qu'elle indique l'ordre croissant.



Les symboles $-\infty$ et $+\infty$ se lisent respectivement « plus l'infini » et « moins l'infini ». Il signifie que l'axe doit se prolonger vers des nombres infiniment petits et des nombres infiniment grands.

2 Intervalles.

Un *intervalle* est un sous-ensemble (une partie) "sans trous" de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

3 Intervalles bornés.

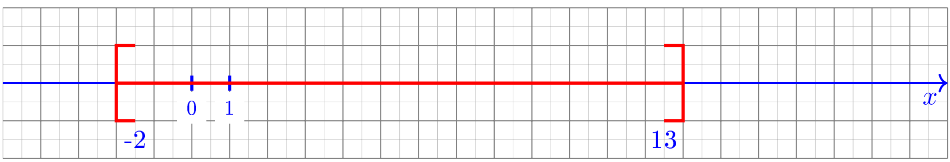
Les intervalles bornés sont les ensembles qui contiennent tous les réels qui sont compris entre deux *bornes* (limites).

Exemples.

L'intervalle $[-2 \quad 13]$ (lisez « fermé en -2 et fermé en 13 ») désigne l'ensemble des nombres réels x compris entre -2 et 13. Ce sont donc tous les nombres x qui vérifient

$$-2 \leq x \leqslant 13$$

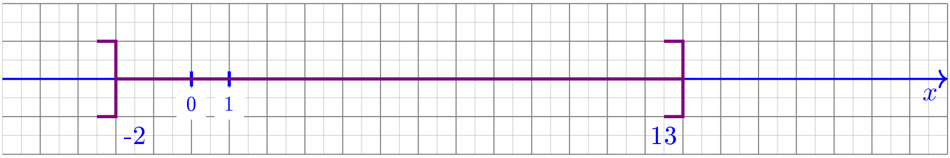
L'ensemble des nombres réels est représenté par une droite et l'intervalle $[-2\ ;\ 13]$ est alors représenté par un segment.



Il arrive souvent qu'en cherchant à optimiser la taille des intervalles il faille exclure les valeurs aux bornes. Ainsi pour désigner l'ensemble de tous les nombres compris entre -2 et 13 mais pas 2 nous noterons : $]-2\ ;\ 13]$ (lisez « ouvert en -2 et fermé en 13 »).

Ce qui correspond à tous le nombres x qui vérifient l'encadrement

$$-2 < x \leqslant 13$$

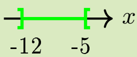


Remarques.

1. Pour dire qu'un nombre a est compris entre 3 et 4 nous écrirons : $a \in [3, 4]$ et nous dirons que x *appartient* à l'intervalle $[3; 4]$.
2. Les bornes d'un intervalle sont toujours écrites dans l'ordre croissant.
3. L'*ensemble vide*, $\varnothing$, qui ne contient aucun élément est considéré comme un intervalle.

Exercice 3. ⚽

Le tableau suivant comporte quatre façons, et donc quatre points de vus, pour parler d'une même notion.
Recopiez-le, puis complétez-le en prenant pour modèle la deuxième ligne.

Notation	Représentation	Inéquations (encadrement)	Description
$[-2; 13]$		$-2 \leq x \leq 13$	Intervalle fermé en -2 et en 13.
[4 ; 8[	...	...	...
		...	...
...	...	$\pi \leq x < 8$	...
...	...	...	Intervalle ouvert en -6 et fermé en 2.

4 Intervalles non bornés.

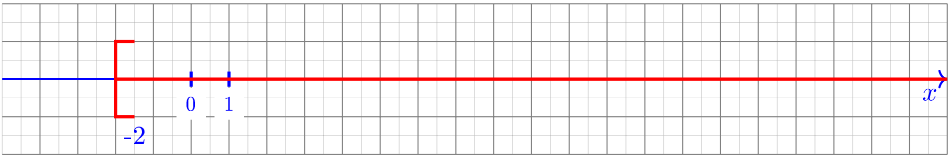
Les intervalles non bornés sont les intervalles qui contiennent tous les nombres plus grands ou plus petits qu'un nombre fixé.

Exemples.

L'intervalle $[-2 \quad +\infty[$ (lisez « fermé en -2 , plus l'infini ») désigne l'ensemble des nombres réels x supérieurs (ou égaux) à -2. Ce sont donc tous les nombres x qui vérifient

$$-2 \leqslant x$$

L'intervalle $[-2\ ;\ +\infty[$ est alors représenté par une demi-droite.

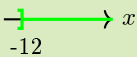


Remarques.

1. Le symbole ∞ désigne l'infini et n'est pas un nombre réel. C'est pourquoi le crochet est toujours ouvert du côté de ce symbole.

Exercice 4. ⚽

Le tableau suivant comporte quatre façons, et donc quatre points de vus, différents pour parler d'une même notion.
Recopiez-le, puis complétez-le en prenant pour modèle la deuxième ligne.

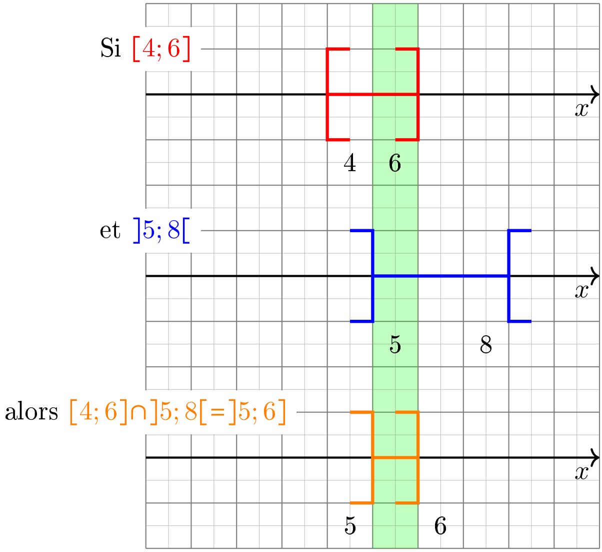
Notation	Représentation	Inéquations (encadrement)	Description
$[-2, +\infty[$		$-2 \leq x$	Intervalle fermé en -2, plus l'infini.
$]-\infty;\ 8[$	...	...	...
		...	...
...	...	$x < \pi$	...
...	...	...	Intervalle moins l'infini, ouvert en -6.

5 Intersection d'intervalles.

Exemples.

1. $5,5$ appartient à l'intersection des intervalles $[4;6]$ et $]5;8[$ puisque $5,5$ appartient à chacun d'entre eux.
   Donc : $5,5 \in [4;6] \cap]5;8[$.
2. $5 \in [4;6]$ mais $5 \notin]5;8[$ donc $5 \notin [4;6] \cap]5;8[$.

Pour déterminer l'intersection (tout entière) de $[4;6]$ et $]5;8[$ nous raisonnerons de façon géométrique comme ci-dessous :



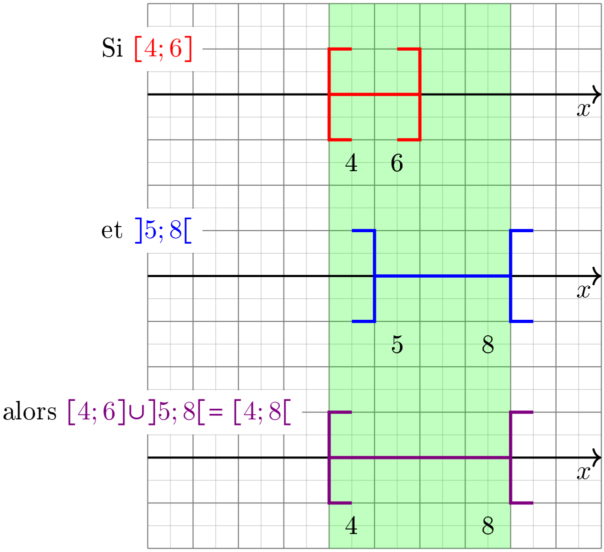
6 Réunion d'intervalles.

Une blague de logicien :
Question à une femme venant d'accoucher : « As-tu un garçon ou une fille ? »
Réponse : « Oui. »

Exemples.

1. $5,5$ et $4,5$ et 7 appartiennent à la réunion des intervalles $[4;6]$ et $]5;8[$ puisqu'ils appartiennent soit à l'un, soit à l'autre, soit aux deux intervalles.
   On écrit : $5,5 \in [4;6] \cup]5;8[$, $4,5 \in [4;6] \cup]5;8[$ et $7 \in [4;6] \cup]5;8[$.
2. $3 \notin [4;6]$ et $3 \notin]5;8[$ donc $3 \notin [4;6] \cup]5;8[$.

Pour déterminer la réunion (tout entière) de $[4;6]$ et $]5;8[$ nous raisonnerons de façon géométrique comme ci-dessous :



III Exercices.

Exercice 5. ⚽

Simplifiez les écritures suivantes en justifiant par un schéma.

a) $[-3;4[\cup]-1;5[$.

b) $]-1;3] \cap]2;4]$.

c) $]-3;2] \cup [3;5]$.

d) $]-13;7] \cap [7;17]$.

e) $]-12;-11[\cap [-11;-3[$.

f) $]-\infty;5] \cap [3;7[$.

g) $]-\infty;0] \cup [0;+\infty[$.

Correction de l'exercice 5

a) $[-3;5[$.

b) $]2;3]$.

c) $]-3;2] \cup [3;5]$.

d) $[7;7] = \{7\}$.

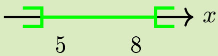
e) $[-11;-3[$.

f) $[3;5]$.

g) $\mathbb{R}$.

Exercice 6.

Complétez le tableau ci-dessous (les schémas ne doivent pas être à l'échelle).

Notation	Schéma	Inéquation(s)	Description
$]-2\ ;\ +\infty[$			
			
		$-3 < x \leq 4$	
			Intervalle ouvert en -5 et fermé en 7.

Exercice 7.

Simplifiez si possible l'écriture des ensembles ci-dessous en justifiant sinon récrivez l'expression proposée.

1. $I_1 =]-13; 4] \cap [3; 8[$
2. $I_2 =]-\infty; 5] \cap]3; 4[$
3. $I_3 =]-2; 2] \cup [3; 4]$