Expressions fractionnaires.

Division.

$$\frac{6}{3} = 2.$$

- Les nombres $\frac{6}{3}$ ou 2 sont appelés le *quotient* de la division.
- 6 est appelé le *numérateur* et 3 le *dénominateur*.
- Si l'écriture fractionnaire est l'écriture usuelle au lycée il est encore possible de trouver les symbole $\div$, $/$, ou $:$ qui se lisent « divisé par » (le symbole $:$ concerne plutôt les ratios).
- La division n'est ni commutative, ni associative et elle n'admet pas d'élément neutre.

Division par 0.

Rappelons tout d'abord qu'il est impossible de diviser par 0, ou pour le dire autrement 0 n'est pas inversible.

Par conséquent les quantités qui apparaissent aux dénominateurs dans ce chapitre sont toutes supposées non nulles.

Une simplification et une astuce.

$\dfrac{a}{1} = a$. Nous nous servirons de cette égalité dans les deux sens : pour simplifier ou pour écrire un nombre sous forme de fraction lorsque nécessaire.

Produit.

$$\frac{a}{b} \times \frac{x}{y} = \frac{a \times x}{b \times y}$$

Simplification par facteur commun.

Nous déduisons de ce qui précède une méthode de simplification d'écriture d'une expression fractionnaire ; il est possible de simplifier un facteur commun aux numérateur et dénominateur : $\frac{a\times c}{b\times c} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{c} = \frac{a}{b} \times 1 = \frac{a}{b}$. Ainsi : $\dfrac{a \times c}{b \times c} = \dfrac{a}{b}$.

Diviser c'est multiplier par l'inverse.

$\frac{a}{b} = \frac{a\times 1}{1\times b} = \frac{a}{1} \times \frac{1}{b} = a \times \frac{1}{b}$. Résumons : $\dfrac{a}{b} = a \times \dfrac{1}{b}$.

Inverse.

$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{ab}{ab} = 1$. Donc $\frac{b}{a}$ est l'inverse de $\frac{a}{b}$: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$.

Expression fractionnaire et signe.

Nous essaierons, si possible, de n'écrire des expressions fractionnaires que positives (si le nombre est négatif le signe moins est mis en évidence devant) : $\dfrac{-a}{b} = -\dfrac{a}{b}$.

Somme.

Pour additionner deux expressions fractionnaires il faut les mettre au même dénominateur. $\frac{a}{b}+\frac{x}{y}=\frac{a\times y}{b\times y}+\frac{b\times x}{b\times y}=\frac{ay+bx}{by}$. C'est une méthode très générale qui fonctionne y compris lorsque nous manipulons d'autres objets que des nombres.

Différence.

Il s'agit d'une combinaison des deux précédents résultats : $\frac{a}{b}-\frac{x}{y}=\frac{a}{b}+\frac{-x}{y}=\frac{a\times y}{b\times y}+\frac{b\times(-x)}{b\times y}=\frac{ay-bx}{by}$.

Quotient.

$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{x}{y}}=\frac{a}{b}\div\frac{x}{y}=\frac{a}{b}\times\left(\frac{x}{y}\right)^{-1}=\frac{a}{b}\times\frac{y}{x}$. Ainsi : $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{x}{y}}=\frac{a}{b}\times\frac{y}{x}$.

Forme irréductible d'une fraction.

Un entier naturel est dit *premier* si et seulement si il a exactement deux diviseurs distincts positifs.

Exemples.

1. 12 n'est pas un nombre premier puisqu'il est divisible par 2 et 3.
2. Les premiers nombres premiers sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.
3. 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur : lui-même.

Théorème 1. - théorème fondamental de l'arithmétique Tout entier naturel supérieur ou égale à 2 admet une décomposition en facteurs premiers unique à l'ordre des facteurs près.

Démonstration.

Hors programme.

Exemples.

1. $12=2\times2\times3$ et 2 et 3 sont bien des nombres premiers.
2. $16=2\times2\times2\times2=2^4$.
3. $36=2\times2\times3\times3=2^2\times3^2$.

Remarques.

1. Pour que l'écriture de la décomposition soit unique la convention est d'écrire une seule fois chaque facteur premier à la puissance convenable et d'écrire les facteurs dans l'ordre croissant. On n'écrira pas $3\times2\times3$ mais 2×3^2.
2. D'après ce théorème tous les résultats sur les nombre entiers naturels peuvent se ramener à des résultats sur les nombres premiers.

Le nombre $\frac{1}{2}$ peut encore s'écrire $\frac{2}{4}$. L'écriture fractionnaire d'un nombre n'est pas unique. Ceci pouvant produire de la confusion les mathématiciens ont retenu une écriture fractionnaire qui est unique : *la forme irréductible d'une fraction*.

Proposition 1. Tout nombre rationnel s'écrit de façon unique comme une fraction dont le numérateur et le dénominateur n'ont pas d'autre commun diviseur que 1 (ou -1), et dont le dénominateur est positif.

Exemples.

1. $\frac{1}{3}$ est une forme irréductible.

2. $\frac{14}{21}$ n'est pas une forme irréductible puisque 14 et 21 admettent 7 pour diviseur commun : $\frac{14}{21} = \frac{2\times 7}{3\times 7} = \frac{2}{3}$.
3. En toute rigueur la forme irréductible de l'entier 5 devrait s'écrire $\frac{5}{1}$ cependant l'usage veut que nous usions de l'écriture la plus simple : 5.

Remarques.

1. Des nombres entiers qui n'ont pas de diviseur commun autre que 1 ou -1 sont dits *premiers entre eux*.
2. Pour trouver la forme irréductible d'une fraction il faut recherche le plus grand facteur commun au numérateur et au dénominateur qu'on appelle le P.G.C.D. (plus grand commun diviseur). Le P.G.C.D. s'obtient grâce à l'algorithme d'Euclide.
3. Dans la pratique pour trouver la forme irréductible nous utiliserons des décompositions en facteurs premiers.

Exercices.

EXERCICE 1. Donnez les expressions irréductibles des nombres rationnels suivants.

a) $A = \dfrac{2}{7} \times \dfrac{9}{4}$.
b) $B = 5 \times \dfrac{7}{15}$.
c) $C = \dfrac{36}{35} \times \dfrac{21}{12}$.
d) $D = \left(\dfrac{4}{5} - \dfrac{1}{15}\right)\times\left(\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{4}\right)$.
e) $E = \dfrac{4}{3} \times \left(\dfrac{1}{8} - 1\right)$.
f) $F = \dfrac{\frac{-9}{4} \times \frac{5}{9}}{1 - \frac{7}{12}}$.

Exercice 1.

a) $A = \frac{2\times 3^2}{2^2\times 7} = \frac{3^2}{2\times 7} = \frac{9}{14}$.
b) $B = \frac{5\times 7}{3\times 5} = \frac{7}{3}$.
c) $C = \frac{2^2\times 3^2\times 3\times 7}{5\times 7\times 3\times 2^2} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5}$.
d) $D = \left(\frac{3\times 4}{3\times 5} - \frac{1}{15}\right)\frac{4+6}{4\times 6} = \frac{11}{15} \times \frac{10}{24} = \frac{11\times 3\times 5}{2\times 5\times 2^3\times 3} = \frac{11}{2^4} = \frac{11}{16}$.
e) $E = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{8h} - \frac{8}{8}\right)$.
f) $F = \frac{\frac{-3^2\times 5}{2^2\times 3^2}}{\frac{12}{12} - \frac{7}{12}} = \frac{-\frac{5}{4}}{\frac{5}{12}} = -\frac{5}{4} \times \frac{12}{5} = -\frac{12}{4} = -3$.

EXERCICE 2. Simplifiez.

a) $1 - \dfrac{1+\pi}{2}$;
b) $\dfrac{\frac{1}{3}}{2}$;
c) $\dfrac{1}{\dfrac{3}{2}}$;
d) $\dfrac{1}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}}$;
e) $\dfrac{4 - \dfrac{2}{3}}{4}$.

EXERCICE 3.

a) Calculez $x - \dfrac{1}{x}$ pour $x = \dfrac{3}{4} - \dfrac{5}{6}$.
b) Calculez $\dfrac{2y - 3x}{2x - 3y}$ pour $x = \dfrac{5}{6}$ et $y = \dfrac{3}{4}$.

EXERCICE 4. Soit x un nombre. Simplifiez les écritures fractionnaires suivantes.

a) $A = \dfrac{6x}{2}$.
b) $B = \dfrac{2x}{8}$.
c) $C = \dfrac{3x+9}{3}$.
d) $D = \dfrac{8x+12}{6}$.

Exercice 4.

a) $A = 3x$.
b) $B = \frac{1}{4}x$.
c) $C = x + 3$.
d) $D = \frac{4}{3}x + 2$.

EXERCICE 5. Soit x un nombre. Écrivez chaque expression littérale sous forme d'une seule expression fractionnaire.

a) $A = 2x - \frac{x}{5}$. b) $B = \frac{3}{2}x - 5$. c) $C = 5 \times \frac{4x-1}{3}$.
d) $D = \frac{2x-3}{4} - 1$. e) $E = 2 - \frac{3x+2}{3}$. f) $F = \frac{x}{6} - \frac{5x-4}{4}$.
g) $G = x + \frac{x-4}{2}$. h) $H = 3 - \frac{x-1}{4}$. i) $I = \frac{3x-2}{8} - \frac{5x+1}{6}$.

Exercice 5.

a) $A = \frac{9x}{5}$. b) $B = \frac{3x-10}{2}$. c) $C = \frac{20x-5}{3}$.
d) $D = \frac{2x-7}{4}$. e) $E = \frac{-3x+4}{3}$. f) $F = \frac{-13x+12}{12}$.
g) $G = \frac{3x-4}{2}$. h) $H = \frac{-x+13}{4}$. i) $I = \frac{-11x-10}{24}$.

EXERCICE 6. Soit x un nombre. On supposera que les dénominateurs des expressions fractionnaires considérés sont tous non nuls. Écrivez chaque expression littérale sous forme d'une seule expression fractionnaire.

a) $A = \frac{2}{x+1} - \frac{x}{x+1}$. b) $B = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}$. c) $C = \frac{x}{4} - \frac{4}{x}$
d) $D = \frac{x}{x+2} - \frac{x}{x+3}$. e) $E = \frac{x}{x+1} + \frac{2x-1}{x}$. f) $F = \frac{x}{x-1} - x$.

Exercice 6.

a) $A = \frac{-x+2}{x+1}$. b) $B = \frac{2x+1}{x(x+1)}$.
c) $C = \frac{x^2-16}{4x}$. d) $D = \frac{x}{(x+1)(x+3)}$.
e) $E = \frac{3x^2+x-1}{x(x+1)}$. f) $F = \frac{-x^2+2x}{x-1}$.

EXERCICE 7. Simplifiez.

a) $1 - \frac{x+1}{2}$; b) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1}$.

EXERCICE 8. Réduisez au même dénominateur puis sommez.

a) $f(x) = 3 + \frac{1}{x-2}$. b) $f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x}$.
c) $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$. d) $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{3x-1}$.
e) $f(x) = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{2}{x-1}$. f) $f(x) = \frac{x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}$.
g) $f(x) = \frac{x-2}{3x-1} - \frac{x+1}{3x+1}$. h) $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{4}{(x-1)(x-5)}$.

EXERCICE 9. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrez que : $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$.
2. Déduisez-en $\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

EXERCICE 10. Soient a, b, c, d, e et f six nombres non nuls, tels que $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$.

1. Montrez que $\frac{a}{d} = \frac{a+b+c}{d+e+f}$.
2. Déduisez-en les valeurs de a, b et c sachant que $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ et que $a + b + c = 7$.
3. Déterminer a, b et c par une autre méthode.

EXERCICE 11. Soient a, b et c trois réels non nuls.

1. Écrivez $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ sous forme d'une seule fraction.

2. Montrez que si $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, alors $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Le vérifier pour $a = 2$, $b = 2$ et $c = -1$.

3. La réciproque de la question précédente est-elle vraie ?

EXERCICE 12. Soit un triangle ABC tel que $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 5$. M est un point du segment $[AB]$. On pose $AM = x$. On projette : M en N sur(AC) parallèlement à (BC), N en O sur (BC) parallèlement à (AB) et O en P sur (AB) parallèlement à (AC). Calculez AP en fonction de x et déduisez-en que P est le symétrique de M par rapport au milieu I de $[AB]$. Déduisez-en que, si l'on reprend la construction précédente à partir de P, alors on la terminera en M.